



**DEPARTAMENTO DE TEORÍA  
DE LA SEÑAL Y  
COMUNICACIONES**



**ANÁLISIS Y SÍNTESIS DE CIRCUITOS**

**TEMA 3**

**Filtros activos. Fundamentos**

# INDICE

<b>1. El Amplificador Operacional.....</b>	<b>1</b>
1.1. El Amplificador Operacional Ideal.....	1
1.2. El Amplificador Operacional Real.....	2
1.2.1. Ganancia Dependiente de la Frecuencia.....	2
1.2.2. Otras Características No Ideales.....	4
1.3. Bloques Activos Usando AA.OO. ....	5
<b>2. Amplificadores de Transconductancia.....</b>	<b>13</b>
2.1. Bloques activos utilizando transconductancias.....	16
<b>3. Funciones de Transferencia de Secciones de 1<sup>er</sup> Y 2<sup>o</sup> Orden.....</b>	<b>19</b>
3.1. Funciones de Transferencia de 1 <sup>er</sup> Orden .....	19
3.1.1. Sección paso bajo de primer orden.....	19
3.1.2. Sección paso alto de primer orden.....	20
3.2. Secciones de 2 <sup>o</sup> Orden.....	21
<b>4. Sensibilidad.....</b>	<b>26</b>
4.1. Definición.....	26
4.2. Propiedades.....	30
4.3. Producto Ganancia - Sensibilidad.....	32
4.4. Sensibilidad de la Función de Transferencia.....	34
4.5. Sensibilidad en Filtros Activos de 2 <sup>o</sup> Orden. ....	35
4.6. Filtros de Orden Superior.....	40

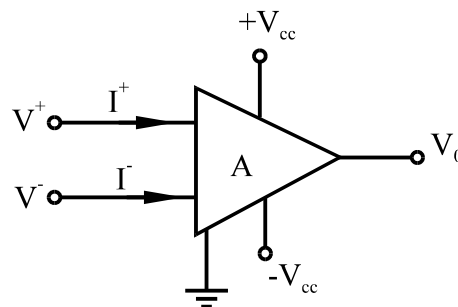
## 1. El Amplificador Operacional.

Una de las alternativas al diseño de filtros pasivos RLC es el diseño de filtros con elementos activos sin necesidad de la utilización de bobinas (elemento cuyo comportamiento es el menos ideal de los tres, sobretodo cuando trabaja en bajas frecuencias). Estos son los llamados “filtros activos” o “filtros activos RC”. Los elementos fundamentalmente usados para su diseño son los AA.OO.. Además generalmente se utilizan AA.OO. para la realización de otros elementos activos (convertidores de impedancia generalizados).

Dedicaremos este punto al estudio del A.O. como un elemento descrito por su relación entrada-salida, sin importar su configuración interna. Comenzaremos el estudio por el A.O. ideal para introducir después las características no ideales más importantes así como su incidencia en el diseño de filtros. Finalmente analizaremos algunos de los bloques más utilizados cuyo diseño está basado en los A.A.O.O..

### 1.1. El Amplificador Operacional Ideal.

El A.O. es una fuente de tensión controlada por tensión con un único terminal de salida ( $V_0$ ) y dos terminales de entrada ( $V^+$  o entrada no inversora y  $V^-$  o entrada inversora). Además presenta dos terminales de alimentación ( $\pm V_{cc}$ ), un terminal de masa y en determinados casos otros de ajuste de offset, compensación en frecuencia que en principio no nos interesa.



El funcionamiento ideal del A.O. viene determinado por:

$$V_0 = A(V^+ - V^-) \quad \text{con} \quad I^+ = I^- = 0$$

donde  $A$  es la ganancia del A.O. que idealmente toma el valor infinito ( $A \rightarrow \infty$ ) para todo margen de frecuencias de trabajo.

La impedancia de entrada es infinita y la de salida será nula ( $R_i = \infty$  y  $R_o = 0$ ). Además si  $A \rightarrow \infty \Rightarrow V^+ - V^- = 0$  y si uno de los dos terminales está conectado a masa, entonces:  $V^+ = V^- = 0$ .

El hecho de que estas aproximaciones sean válidas o no depende de muchos factores como pueden ser los niveles de impedancia del circuito, y más importante, del margen de frecuencias de funcionamiento.

## 1.2. El Amplificador Operacional Real.

### 1.2.1. Ganancia Dependiente de la Frecuencia.

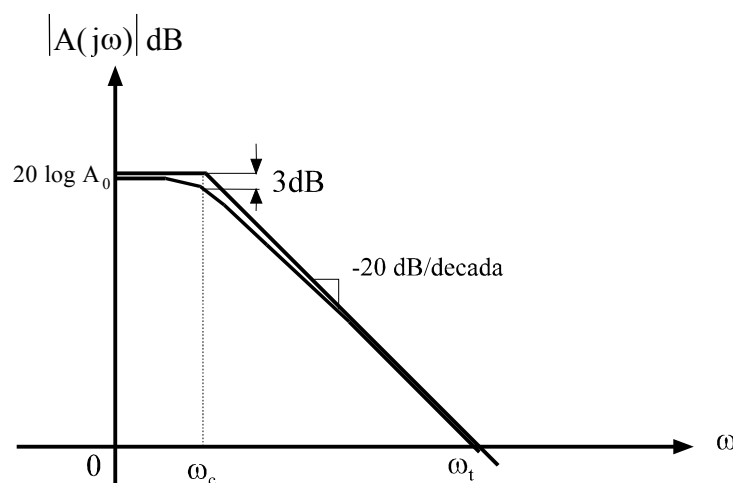
Las características de ganancia y ancho de banda finitos de los AA.OO. son los factores que más afectan al correcto funcionamiento de los circuitos en el diseño de filtros activos.

En general, la respuesta en frecuencia de los AA.OO. está determinada por varios polos y ceros. Sin embargo, para asegurar la estabilidad en las configuraciones en lazo cerrado, los AA.OO. se diseñan de forma que presenten un polo real en  $s = -\sigma$  ( $\sigma > 0$ ) por lo que la respuesta en frecuencia de un A.O. se puede expresar como:

$$A(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_c}} = \frac{A_0 \omega_c}{s + \omega_c}$$

donde  $A_0 \omega_c$  es el producto ganancia-ancho de banda,  $\omega_c$  es la pulsación de corte a 3 dB y  $A_0$  es la ganancia en continua.

Si representamos la variación de la ganancia en función de la pulsación tenemos:



En la gráfica se observa que  $A$  tiene una caída uniforme de 6 dB/oct. ó 20dB/dec. con la frecuencia de corte a 3 dB en  $\omega_c$  y una anchura de banda, para ganancia unidad, que es  $\omega_t$ .

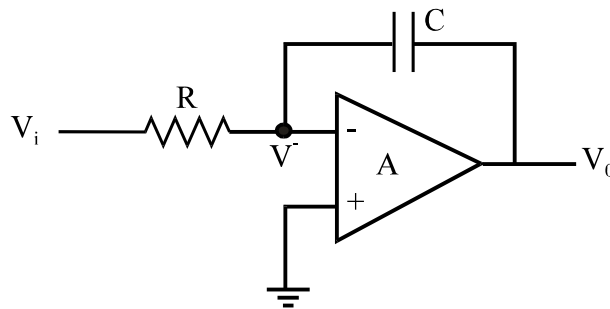
Valores típicos de estos parámetros pueden ser:

$$A_0 > 10^4 \rightarrow (10^5 \mu A 741) \quad \forall \quad 5\text{Hz} \leq f_c \leq 100\text{Hz} \quad f_t \geq 10^6 \text{ Hz}$$

Para pulsaciones iguales o superiores a  $\omega_t$ , se producen otras desviaciones importantes (la fase pasa a tomar valores por debajo de  $-90^\circ$ ). Esto hace que haya que usar otra aproximación más exacta para tener en cuenta el efecto de otros polos y ceros que no se tuvieron en cuenta en el caso anterior.

**Ejemplo:**

Analizar el efecto de la ganancia finita sobre el integrador de la siguiente figura:



a.- A.O. IDEAL:

$$\frac{V_i - V^-}{R} = \frac{V^- - V_0}{1/Cs} \quad \text{como} \quad V^+ = V^- = 0$$

$$\frac{V_i}{R} = -V_0 Cs \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = -\frac{1}{RCs}$$

es decir, el circuito es un integrador ideal.

b.- A.O. REAL CON GANANCIA  $A(s) = \frac{A_0}{1 + \frac{s}{\omega_c}}$ .

$$\text{Ecuación del nudo } V^-: 0 = -\frac{V_i}{R} + \left(Cs + \frac{1}{R}\right)V^- - CsV_0$$

$$\text{Además, como } V^+ = 0: V_0 = -A(s)V^- \Rightarrow V^- = -\frac{V_0}{A(s)}$$

$$0 = -GV_i - (Cs + G)\frac{V_0}{A(s)} - CsV_0$$

$$-GV_i = \left[\frac{Cs + G}{A(s)} + Cs\right]V_0 \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = -\frac{G}{\frac{Cs + G}{A(s)} + Cs}$$

$$\frac{V_0}{V_i} = -\frac{1}{\frac{1 + RCs}{A(s)} + RCs}$$

Si  $A(s) \rightarrow \infty$  obtendríamos la respuesta de un integrador ideal.

Si sustituimos  $A(s)$  por su expresión:

$$\frac{V_o}{V_i} = - \frac{1}{RCs + \left( \frac{s + \omega_c}{A_0 \omega_c} \right) (1 + RCs)}$$

Vemos, por tanto, que el hecho de ser la ganancia dependiente de la frecuencia conduce a comportamientos no ideales de los circuitos.

### 1.2.2. Otras Características No Ideales.

#### 1.2.2.1 Impedancias de entrada y salida.

Aunque las impedancias de entrada y salida dependerán en general de la frecuencia, se considerarán siempre como resistivas. La impedancia de entrada de los AA.OO. modernos, especialmente los que presentan entrada con FET, son muy grandes comparadas con los que pueden presentar el resto de los elementos del circuito, por lo que su efecto puede ser despreciado.

La impedancia de salida puede variar entre valores de  $50 \Omega \leq R_0 \leq 1000 \Omega$  y, a veces, pueden tener efectos negativos en el funcionamiento de filtros activos. Normalmente no presentan problemas si el nivel de impedancia en el circuito, dentro del margen de frecuencias de interés, es mucho mayor que  $R_0$ .

#### 1.2.2.2 Slew-rate; Máxima salida sin distorsión.

$$SR = \left. \frac{dV_o(t)}{dt} \right|_{\max}$$

Que indica la variación máxima que se puede conseguir en la señal de salida y que viene limitada por las limitaciones de corriente de los elementos que forman los AA.OO.

Centrándonos en las señales sinusoidales ( $v(t) = V_0 \sin \omega t$ ), su variación máxima es:

$$\left. \frac{dV(t)}{dt} \right|_{\max} = \omega V_0 \cos \omega t \Big|_{\max} = \omega_{\max} V_0$$

y el límite en la señal de salida será (para un margen de frecuencias dado):

$$V_0 < \frac{SR}{\omega_{\max}}$$

Además hay que tener en cuenta que la señal de salida no puede superar a la señal de alimentación:

$$V_0 < |V_{cc}|$$

Por tanto, habrá que tener en cuenta estas consideraciones para conocer el límite máximo que podemos obtener de señal de salida para un A.O. dado.

Otras características no ideales como:

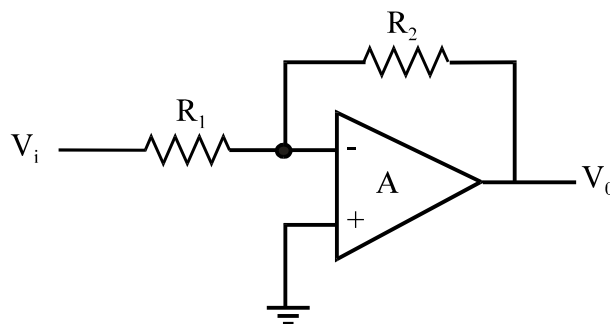
Tensión de offset, Corriente de offset, Corriente de polarización. Rechazo en modo común (CMMR). son siempre despreciables para el análisis y diseño de filtros activos.

### 1.3. Bloques Activos Usando AA.OO.

Veremos a continuación algunos de los bloques activos que más se utilizan para el diseño de filtros activos basados en AA.OO..

En determinados casos nos interesará amplificar (o atenuar) una determinada señal. Para ello se utilizan dos configuraciones básicas:

#### 1.- Configuración inversora:



Calculamos la ganancia del mismo:

Nudo  $V^-$ :  $0 = -V_i G_1 + (G_1 + G_2) V^- - G_2 V_0$  siendo  $G_1 = 1/R_1$  y  $G_2 = 1/R_2$

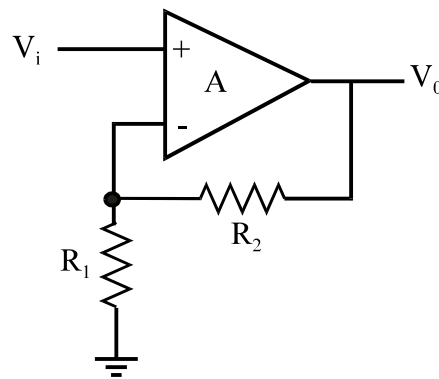
Ecuación del A.O.:  $V_0 = -A V^- \Rightarrow V^- = -\frac{V_0}{A}$

$$0 = -V_i G_1 - (G_1 + G_2) \frac{V_0}{A} - G_2 V_0 \Rightarrow -V_i G_1 = \left( \frac{G_1 + G_2}{A} + G_2 \right) V_0$$

$$\frac{V_0}{V_i} = -\frac{G_1}{\frac{G_1 + G_2}{A} + G_2} = -\frac{G_1}{G_2} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{G_1}{G_2}\right) \frac{1}{A}} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{A}}$$

Si  $|A(j\omega)| \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = -\frac{R_2}{R_1} = k$  (valor nominal de la ganancia).

## 2.- Configuración no inversora:



$$\left. \begin{aligned} (G_1 + G_2)V^- - G_2 V_0 &= 0 \\ (V_i - V^-)A &= V_0 \Rightarrow V^- = \frac{-V_0 + AV_i}{A} \end{aligned} \right\}$$

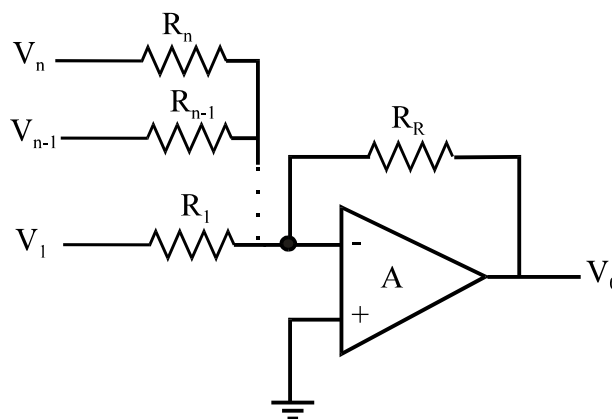
$$\frac{AV_i - V_0}{A}(G_1 + G_2) - G_2 V_0 = 0 \Rightarrow (G_1 + G_2)V_i = \left(G_2 + \frac{G_1 + G_2}{A}\right)V_0$$

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{1}{G_2 + \frac{G_1 + G_2}{A}} = \left(1 + \frac{G_1}{G_2}\right) \frac{1}{1 + \left(\frac{G_1 + G_2}{AG_2}\right)} = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) \frac{1}{A}}$$

$$\text{Si } |A(j\omega)| \rightarrow \infty \Rightarrow \frac{V_0}{V_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1} = k_2 \text{ (valor nominal de la ganancia).}$$

## 3.- Circuito sumador.

Este circuito está basado en el amplificador inversor cuyo esquema es el siguiente:

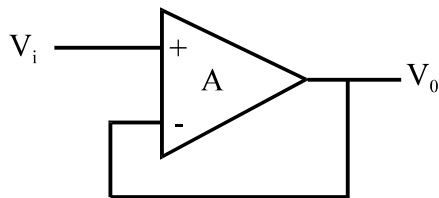


$$V_0 = -\frac{1}{1 + \frac{1}{A(s)} \frac{G}{G_R}} \sum_{i=1}^n \frac{G_i}{G_R} V_i \quad \text{donde} \quad G = G_R + \sum_{i=1}^n G_i$$



Si  $|A(j\omega)| \rightarrow \infty \Rightarrow V_0 = -\sum_{i=1}^n \frac{G_i}{G_R} V_i$  siendo la ganancia de cada entrada ajustable independientemente del resto de las entradas.

#### 4.- Circuito separador de etapas:



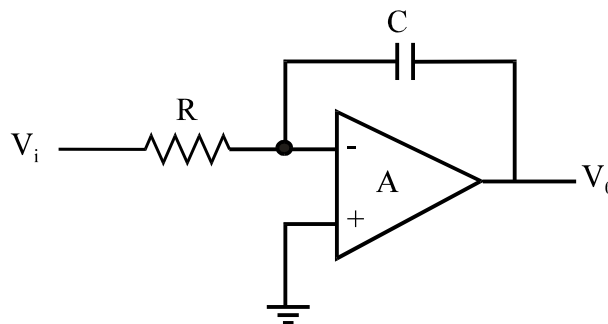
$$V_0 = A(V_i - V_0) \Rightarrow V_0(1 + A) = AV_i$$

$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{A}{1 + A} = \frac{1}{1 + \frac{1}{A}}$$

Su ancho de banda a 3 dBs es  $\omega_t$  (suficientemente grande) y además  $\left| \frac{V_0}{V_i} \right| \cong 1$  para un margen de frecuencias adecuado,  $\omega \ll \omega_t$ . La razón principal por la que se utilizan estos amplificadores de ganancia unidad es su alta impedancia de entrada y su extremadamente baja impedancia de salida;

$$Z_{in} \cong R_i \quad Z_{out} \cong \frac{R_o}{1 + A(s)}$$

#### 5.- Integradores.



Si el amplificador es ideal su función de transferencia será:  $\frac{V_0}{V_i} = -\frac{1}{sRC}$

Teniendo en cuenta la ganancia finita del A.O.

$$\left. \begin{aligned} 0 &= -V_i G + V^-(G + Cs) - V_0 sC \\ V_0 &= -AV^- \end{aligned} \right\} \Rightarrow 0 = -V_i G - \frac{V_0}{A}(G + Cs) - V_0 sC \Rightarrow -V_i G = \left( Cs + \frac{G + Cs}{A} \right) V_0$$

$$\frac{V_0}{V_i} = -\frac{G}{Cs + \frac{G + Cs}{A}} = -\frac{G}{Cs} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{G}{Cs}\right) \frac{1}{A}} = -\frac{1}{RCs} \frac{1}{1 + \left(1 + \frac{1}{RCs}\right) \frac{1}{A}}$$

### 6.- Giradores y conversores de inmitancia generalizados.

Según se verá posteriormente, existen diversos criterios para el diseño de filtros activos. Uno de ellos está basado en la simulación de las bobinas que aparecen en los filtros LC en escalera mediante redes activas RC. El hecho de que la teoría de simulación de filtros LC en escalera esté perfectamente establecida, así como el de que exista un gran número de tablas para el diseño de tales filtros, unido a que en su estructura aparecen los AA.OO. hace que los veamos aquí.

El método mejor conocido para la simulación de bobinas es el uso del “girador”. Un girador es un cuadripolo cuya impedancia de entrada es proporcional a la admitancia de la carga:

$$Z_{in}(s) = \frac{r^2}{Z_L(s)} = r^2 Y_L(s)$$

donde  $r$  es la resistencia de giro. Si la carga del cuadripolo es un condensador, su admitancia será  $Y_L = sC$  y por tanto  $Z_{in} = r^2Cs$  será la impedancia de una bobina.

Recordando las ecuaciones de la familia de parámetros “Y” de un cuadripolo:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= y_{11} V_1 + y_{12} V_2 \\ I_2 &= y_{21} V_1 + y_{22} V_2 \end{aligned} \right\}$$

cargado por una determinada admitancia:  $\frac{I_2}{V_2} = -Y_L$ , podemos calcular su admitancia de entrada:

$$\left. \begin{aligned} \frac{I_1}{V_1} &= y_{11} + y_{12} \frac{V_2}{V_1} \\ V_1 &= \frac{I_2}{y_{21}} - \frac{y_{22}}{y_{21}} V_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{I_1}{V_1} = y_{11} + y_{12} V_2 \frac{1}{\frac{I_2}{y_{21}} - \frac{y_{22}}{y_{21}} V_2} = y_{11} + \frac{y_{12} y_{21}}{-Y_L - y_{22}}$$

$$\frac{I_1}{V_1} = \frac{-y_{11} Y_L - y_{11} y_{22} + y_{12} y_{21}}{-Y_L - y_{22}} = \frac{y_{11} Y_L + |y|}{Y_L + y_{22}}$$

por lo que la impedancia será:

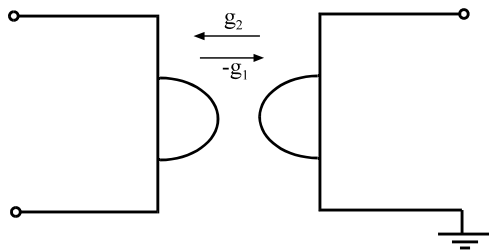
$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Y_L + y_{22}}{y_{11} Y_L + |y|}$$

Para que la impedancia de entrada sea proporcional a  $Y_L$ , habrá que hacer  $y_{22} = y_{11} = 0$ , quedando por tanto:

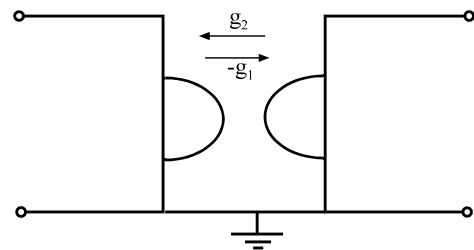
$$Z_{in} = -\frac{Y_L}{y_{12} y_{21}}$$

donde eligiendo  $y_{12} = g_2$  e  $y_{21} = -g_1$  se consigue el efecto deseado:  $Z_{in} = \frac{Y_L}{g_1 g_2}$

Los giradores se representan por el siguiente esquema:

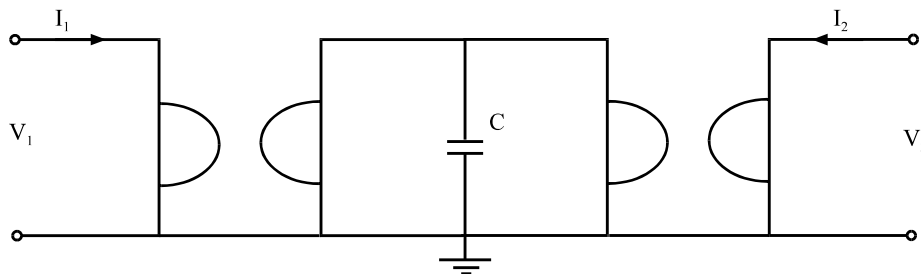


GIRADOR FLOTANTE

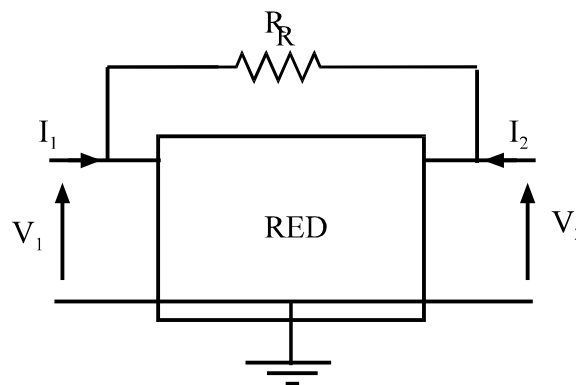


GIRADOR PUESTO A TIERRA

Los giradores flotantes son difíciles de construir, aunque es posible conectando dos giradores puestos a tierra con un condensador entre ellos.



Para obtener un circuito que realice la operación anterior vamos a partir del siguiente esquema:



donde suponemos la red con impedancia de entrada infinita (entrada de un A.O.) e impedancia de salida nula (salida de un A.O.).

Queremos obtener:  $Z_i = \frac{V_1}{I_1} = Ls.$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{R_R} \quad (Z_i \rightarrow \infty \quad Z_0 \rightarrow 0)$$

$$I_1 = \frac{V_1}{Ls}$$

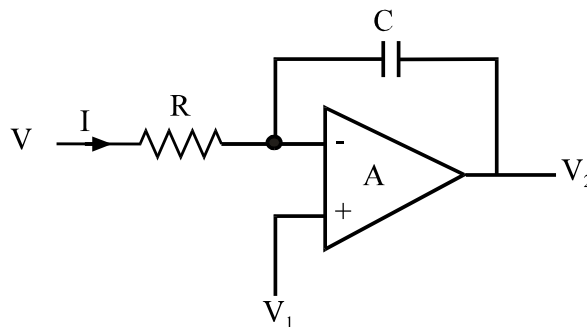
Igualando ambas expresiones:

$$\frac{V_1 - V_2}{R_R} = \frac{V_1}{Ls} \Rightarrow V_1 \left( \frac{1}{R_R} - \frac{1}{Ls} \right) = \frac{V_2}{R_R}$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 - \frac{R_R}{Ls}$$

Por tanto tendremos que conseguir una red cuya función de transferencia sea la anterior, es decir, restar una integración de una constante.

Si analizamos la función de transferencia del siguiente circuito:



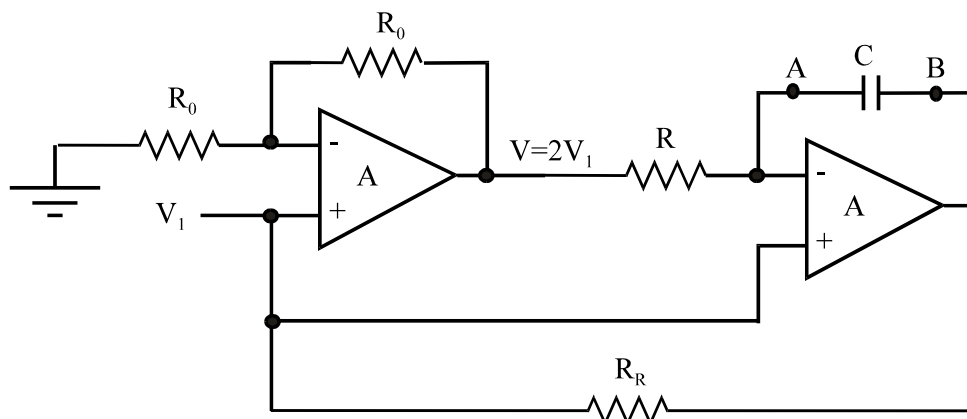
Suponiendo el A.O. ideal:

$$I = \frac{V - V_1}{R}$$

$$V_2 = -\frac{1}{Cs} I + V_1 = -\frac{1}{RCs} (V - V_1) + V_1 = -\frac{1}{RCs} V + \frac{1}{RCs} V_1 + V_1$$

$$\frac{V_2}{V_1} = 1 + \frac{1}{RCs} \left( 1 - \frac{V}{V_1} \right)$$

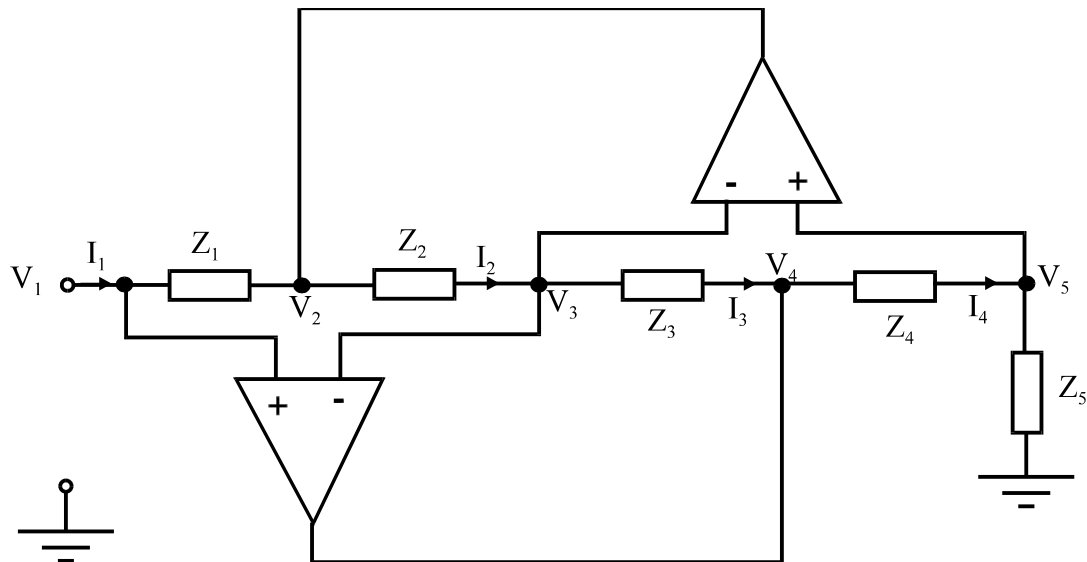
Consiguiendo que  $1 - \frac{V}{V_1} = -1$ , es decir que  $\frac{V}{V_1} = 2$  (amplificador no inversor), habremos conseguido la realización deseada:



Realimentando con una resistencia  $R_R$  habremos conseguido una bobina de autoinducción:  $L=CRR_R$ .

Aunque este circuito puede considerarse un girador formado como puerta de salida los puntos A-B, al no estar esta puerta ni flotante ni puesta a tierra, es preferible referirse a él como un simulador de bobinas.

El circuito anterior es uno más de los distintos simuladores existentes y cuya configuración genérica es:



Suponiendo los AA.OO. ideales:

$$I_4 = \frac{V_1}{Z_5} \Rightarrow V_4 = (Z_4 + Z_5) \frac{V_1}{Z_5} = \left(1 + \frac{Z_4}{Z_5}\right) V_1$$

$$I_2 = I_3 = \frac{V_1 - V_4}{Z_3} = \frac{1}{Z_3} \left( V_1 - V_1 - \frac{Z_4}{Z_5} V_1 \right) = -\frac{Z_4}{Z_3 Z_5} V_1$$

$$V_2 = I_2 Z_2 + V_1 = -V_1 \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} + V_1 = \left(1 - \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5}\right) V_1$$

$$I_1 = \frac{V_1 - V_2}{Z_1} = \frac{1}{Z_1} \left( V_1 - V_1 + \frac{Z_2 Z_4}{Z_3 Z_5} V_1 \right) = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3 Z_5} V_1$$

Por tanto, la impedancia a la entrada  $Z_{in} = \frac{V_1}{I_1}$  es:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$$

Así tomando :  $Z_1 = R_1$  ;  $Z_3 = R_3$  ;  $Z_5 = R_5$  y una de las dos  $Z_2$  ó  $Z_4$  como un condensador y la otra resistiva, tenemos:

$$Z_{in} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{R_1 R_3 R_5}{R \frac{1}{C s}} = \frac{R_1 R_3 R_5}{R} C s$$

es decir, simularemos una bobina de autoinducción:

$$L = \frac{R_1 R_3 R_5}{R} C$$

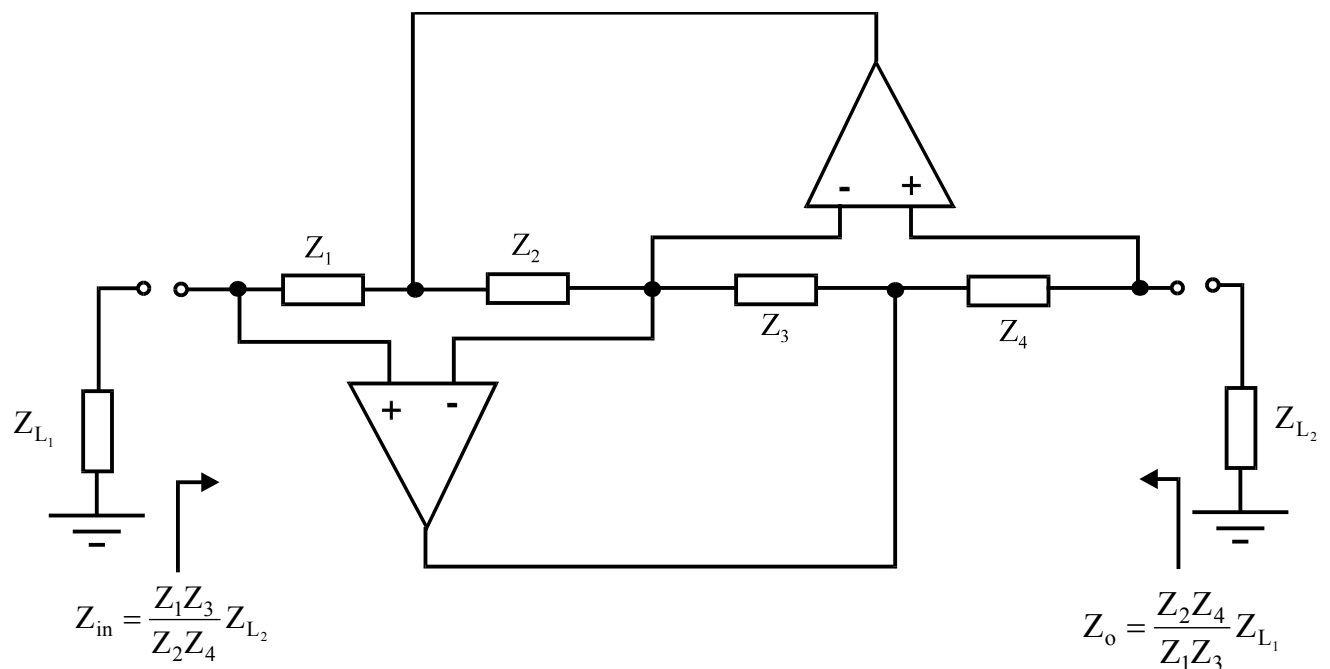
Según la ecuación  $Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3 Z_5}{Z_2 Z_4}$  podemos considerar el circuito anterior como una red de dos puertos, una en  $V_1$  y la otra puerta donde está conectada  $Z_5$ . Con esto se obtiene que:

$$Z_{in} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_2 Z_4} Z_{L_2} = k(s) Z_{L_2}$$

Si analizamos el circuito de salida a entrada, cargándolo a la entrada con una impedancia  $Z_{L_1}$ , obtenemos:

$$Z_o = \frac{Z_2 Z_4}{Z_1 Z_3} Z_{L_1} = \frac{Z_{L_1}}{k(s)}$$

por lo que a este circuito se le conoce como convertor de impedancias generalizado.



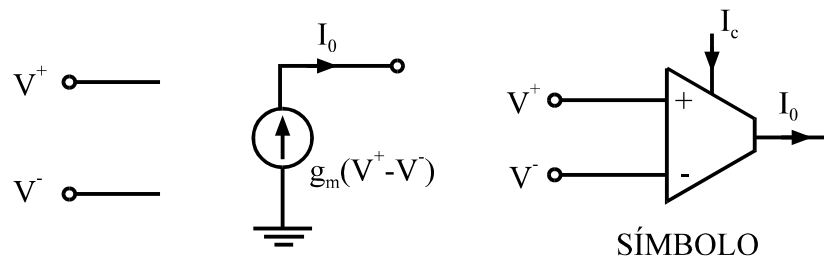
## 2. Amplificadores de Transconductancia.

Aunque la mayoría de los filtros activos están contruidos en base a fuentes de tensión controladas por tensión (A.O.), su uso está restringido a determinadas aplicaciones debido sobre todo a su ganancia dependiente de la frecuencia (hasta audio-frecuencia). Además son más difíciles de integrar en circuitos integrados (es difícil integrar un filtro activo RC con A.O. con otros circuitos analógicos o digitales en el mismo chip).

Se tiende por tanto a realizar filtros activos con otros elementos que introduzcan ganancia y que se denominan “Amplificadores de transconductancia”, que son fuentes de corriente controladas por tensión.

Estos amplificadores suelen tener un ancho de banda bastante mayor que los AA.OO. y suelen ser más fácil integrarlos en un chip junto con otra circuitería además de que, en general, necesitaremos menos elementos para realizar el mismo filtro.

El circuito equivalente de un amplificador de transconductancia ideal es:

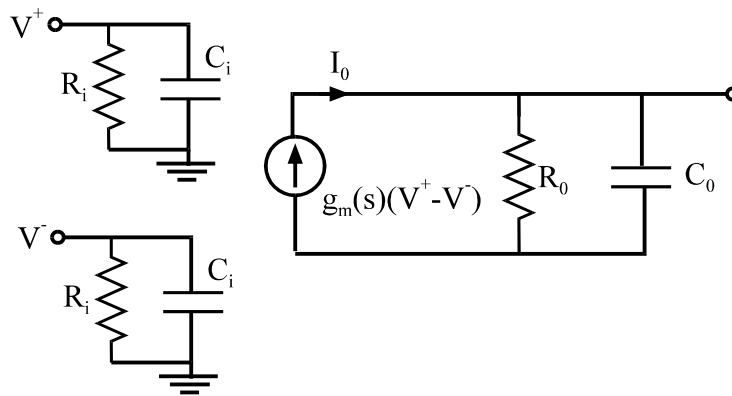


Su funcionamiento ideal es:  $I_0 = g_m (V^+ - V^-)$  y además, tanto su impedancia de entrada como de salida serán infinitas.

En algunos casos, la transconductancia  $g_m$  es variable y se puede controlar por medio de una corriente de control ( $I_c$ ), es decir,  $g_m = K I_c$ .

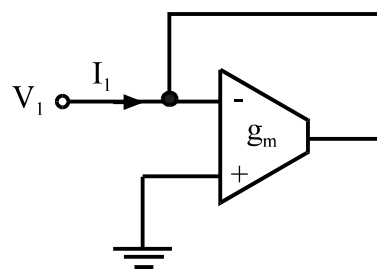
Las anteriores serán las características ideales, pero en la práctica las impedancias de entrada y salida no serán infinitas y la transconductancia,  $g_m$ , muchas veces dependerá de la frecuencia. Además, habrá que tener en cuenta otras limitaciones prácticas como el pequeño rango de señal de entrada ( $\leq 20$  mV), limitación de señal de salida, corrientes de polarización, etc. Ahora bien, la limitación de ancho de banda es mucho menor ya que el ancho de banda es mayor que en los AA.OO..

Teniendo en cuenta las características no ideales de entrada y salida, se puede obtener un modelo equivalente para el amplificador de transconductancia:



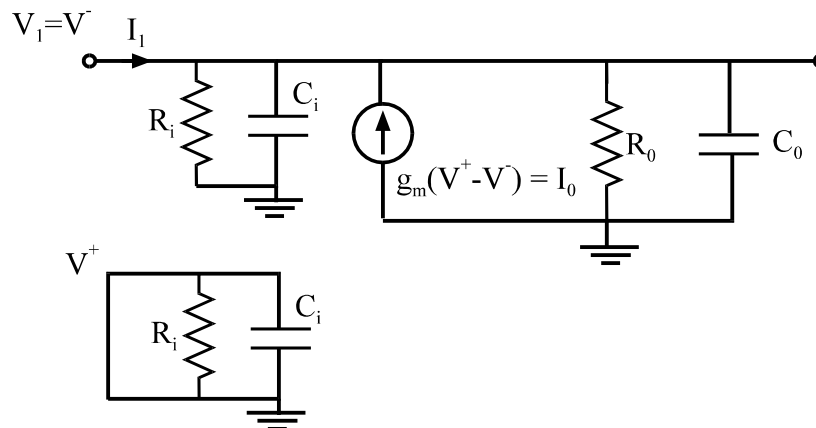
**Ejemplo 1:**

Analizar la  $Z_e$  del siguiente circuito:



**Solución:**

Para obtener la solución plantearemos el circuito equivalente:



Llamando:  $Y_i = C_i s + \frac{1}{R_i}$  e  $Y_0 = C_0 s + \frac{1}{R_0}$ , tenemos:

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_0 - V_1(Y_i + Y_0) &= 0 \\ I_0 = g_m(V^+ - V^-) = -g_m V_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 - g_m V_1 - V_1(Y_i + Y_0) = 0$$

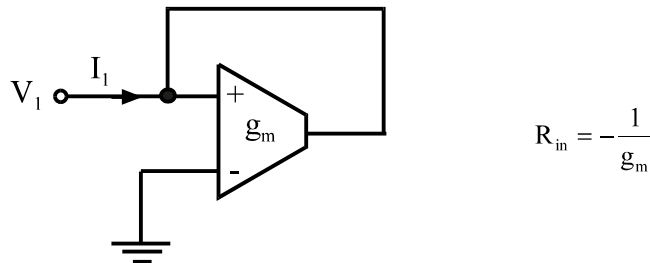
$$I_1 = V_1(g_m + Y_i + Y_0) \Rightarrow Z_e = \frac{V_1}{I_1} = \frac{1}{g_m + Y_i + Y_0}$$



Si el amplificador fuese ideal entonces  $Y_i = Y_o = 0$  y por tanto el circuito simula una resistencia a masa de valor:

$$R_{in} = \frac{1}{g_m}$$

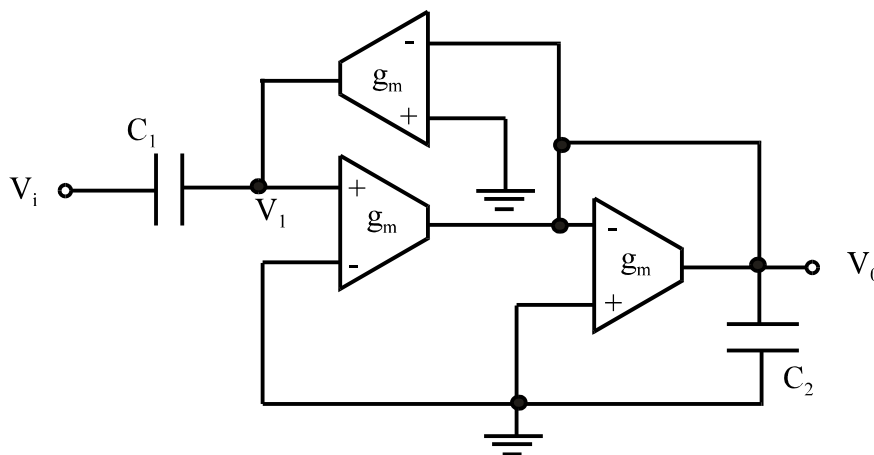
Si se intercambian los terminales de entrada del amplificador:



Por lo que vemos que fácilmente puede implementarse tanto resistencias positivas como negativas. Esto permite, además, diseñar filtros activos RC sólo con condensadores y amplificadores de este tipo.

### Ejemplo 2:

Analizar el siguiente circuito suponiendo ideales los amplificadores de transconductancia:



### Solución:

$$\left. \begin{array}{l} V_0(C_2s) = g_m V_1 - g_m V_0 \\ (V_1 - V_i)C_1s = -g_m V_0 \end{array} \right\} \Rightarrow (g_m + C_2s)V_0 = g_m V_1 \Rightarrow V_1 C_1 s = -g_m V_0 + V_i C_1 s$$

$$V_1 = \frac{V_i C_1 s - g_m V_0}{C_1 s}$$

$$(g_m + C_2s)V_0 = g_m \left( V_i - \frac{g_m}{C_1 s} V_0 \right) \Rightarrow \left( g_m + C_2s + \frac{g_m^2}{C_1 s} \right) V_0 = g_m V_i$$

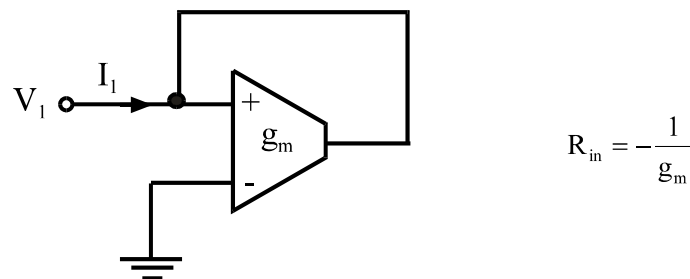
$$\frac{V_0}{V_i} = \frac{g_m}{g_m + C_2 s + \frac{g_m^2}{C_1 s}} = \frac{g_m C_1 s}{C_1 C_2 s^2 + g_m C_1 s + g_m^2} = \frac{\frac{g_m s}{C_2}}{s^2 + \frac{g_m s}{C_2} + \frac{g_m^2}{C_1 C_2}}$$

que representa una sección de segundo orden paso-banda.

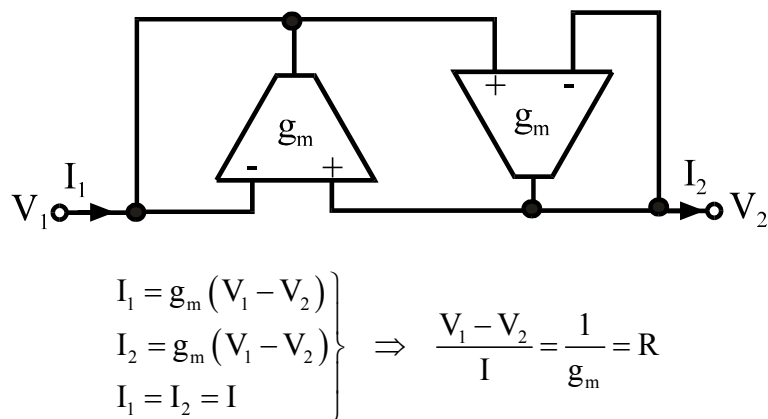
## 2.1. Bloques activos utilizando transconductancias.

Aunque los amplificadores operacionales son los dispositivos más usados en el diseño de bloques activos, debido a la mayor facilidad de integración de los amplificadores transconductancias (OTA) y a la mayor sencillez de diseño en determinados casos, vamos a estudiar algún circuito sencillo basado en ellos (consideraremos los OTA ideales).

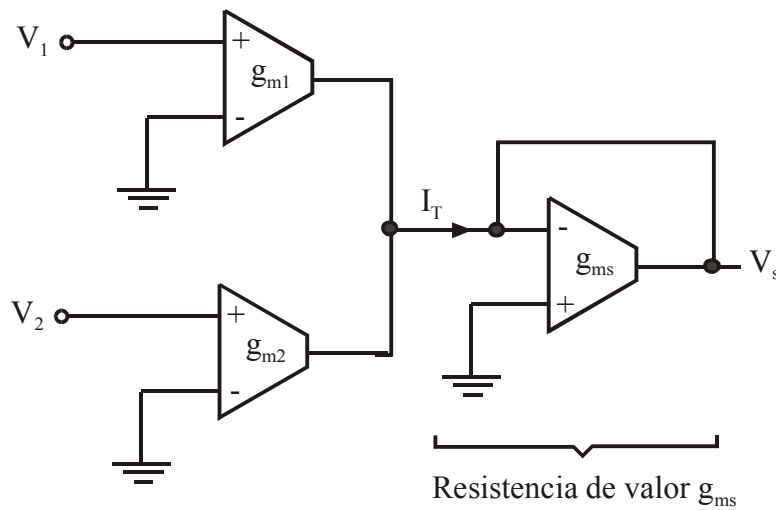
1.- **Resistencia.** El diseño de una resistencia puesta a tierra se vio anteriormente.



Para conseguir una “resistencia flotante” necesitamos que la corriente  $I_1$  fluya hacia un 2º terminal. Analizamos el siguiente circuito:



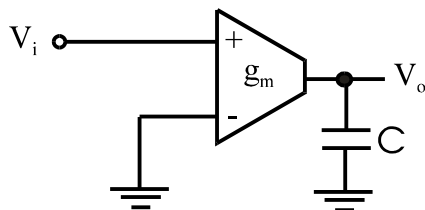
2.- **Sumador.** Necesitamos un OTA por cada señal a sumar mas otro de salida.



$$0 = g_{m1} V_1 + g_{m2} V_2 - g_{ms} V_s$$

$$V_s = \frac{g_{m1}}{g_{ms}} V_1 + \frac{g_{m2}}{g_{ms}} V_2$$

3.- **Integrador.**



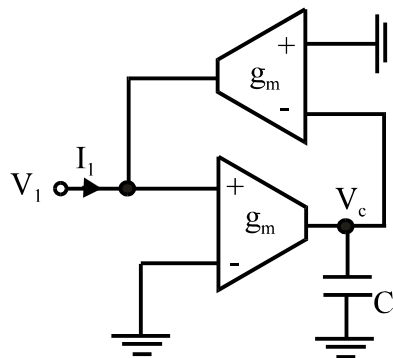
$$V_o = g_m V_i \frac{1}{C_s}$$

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{g_m}{C_s}$$

Integrador ideal

4.- **Simulador de bobinas:**

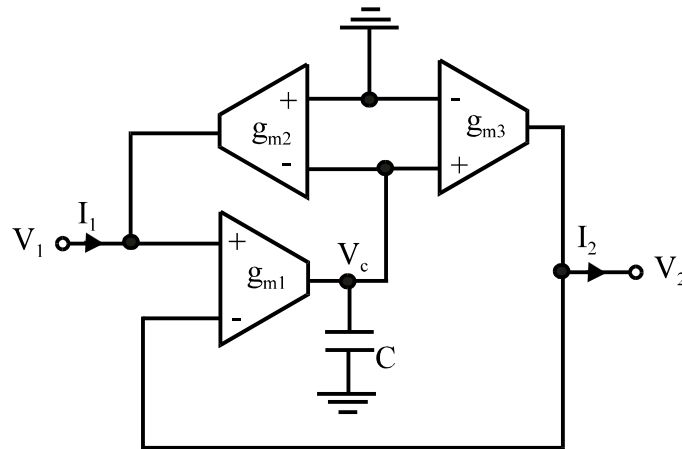
-Bobina puesta a tierra.



$$V_c = g_m V_i \frac{1}{C_s} \Rightarrow I_1 = g_m V_c = g_m^2 V_i \frac{1}{C_s} \Rightarrow Z_i = \frac{V_i}{I_1} = \frac{C_s}{g_m^2} \Rightarrow \text{bobina de autoinducción } L = \frac{C}{g_m^2}$$

La ganancia de cada amplificador pueden ser distintas.

**-Bobina flotante:**



$$V_c = g_{m_1} (V_1 - V_2) \frac{1}{C_s} \Rightarrow \begin{cases} I_1 = g_{m_2} V_c = g_{m_1} g_{m_2} \frac{V_1 - V_2}{C_s} \\ I_2 = g_{m_3} V_c = g_{m_1} g_{m_3} \frac{V_1 - V_2}{C_s} \end{cases}$$

Si  $g_{m_2} = g_{m_3} = g_m$  tendremos:

$$I_1 = I_2 = I$$

$$I = \frac{g_{m_1} g_m}{C_s} (V_1 - V_2) \Rightarrow \frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{C_s}{g_{m_1} g_m}$$

es decir, una bobina flotante de valor  $L = \frac{C}{g_{m_1} g_m}$ .

### 3. Funciones de Transferencia de Secciones de 1<sup>er</sup> Y 2<sup>o</sup> Orden

Generalmente para conseguir diseñar filtros activos de orden superior se utilizan, entre otras, técnicas de conexión en cascada de circuitos típicos de primer y segundo orden. Realizando un diseño correcto de estas redes podemos conseguir la respuesta de un filtro con la complicación y el orden deseado. Una vez diseñadas cada una de estas secciones, mediante el uso de dispositivos activos podemos evitar los efectos de carga al realizar la conexión en cascada.

Hay únicamente dos tipos de posibles respuestas de primer orden, una paso alto y otra paso bajo. En este tipo de secciones podemos controlar la frecuencia central y el nivel de impedancia.

Existen siete posibles respuestas de segundo orden. De todas ellas las tres principales son la respuesta paso bajo, paso alto y paso banda. El resto podemos obtenerlas mediante combinación de las otras tres.

En las secciones de segundo orden, es posible controlar el nivel de impedancia, la frecuencia central y una nueva característica denominada Q (factor de calidad) que nos da idea del valor del pico producido en la respuesta alrededor de la frecuencia de corte.

Las secciones de primer orden no son generalmente utilizados por si solas como filtros. Algunas secciones de segundo orden, en cambio, realizan filtros de características buenas. Pero en general el diseño de filtros activos de buenas características se consiguen mediante la combinación en cascada de secciones de primer y segundo orden.

#### 3.1. Funciones de Transferencia de 1<sup>er</sup> Orden

Existen dos funciones de transferencia típicas de primer orden que representan a secciones de filtros paso bajo y paso alto.

##### 3.1.1. Sección paso bajo de primer orden

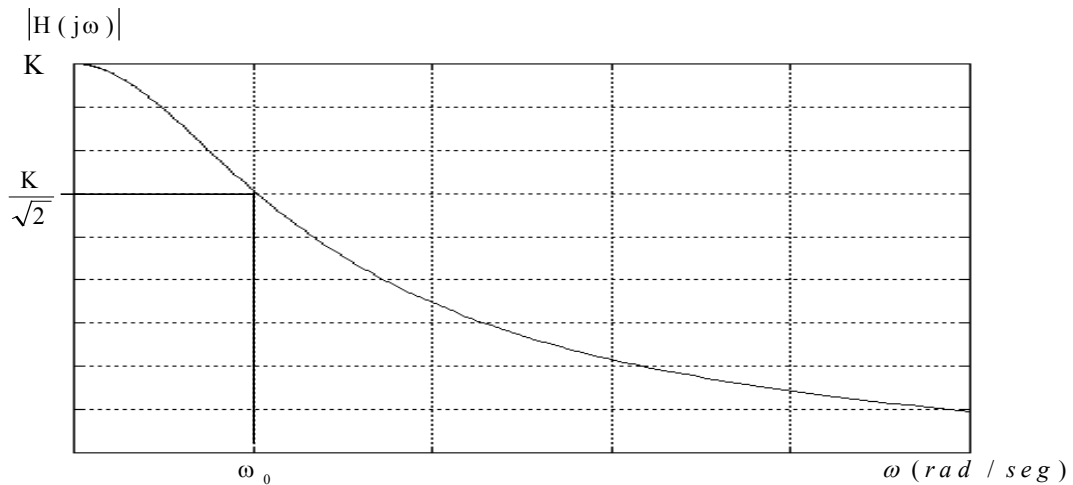
La función de transferencia de primer orden que representa una sección paso bajo tiene la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{k\omega_0}{s + \omega_0}$$

Para  $s = j\omega$  obtenemos:

$$H(j\omega) = \frac{k\omega_0}{j\omega + \omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{k\omega_0}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \\ \phi_H = -\arctg \frac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$$

A continuación se realiza una representación gráfica del módulo de la función de transferencia en función de la frecuencia.



### 3.1.2. Sección paso alto de primer orden

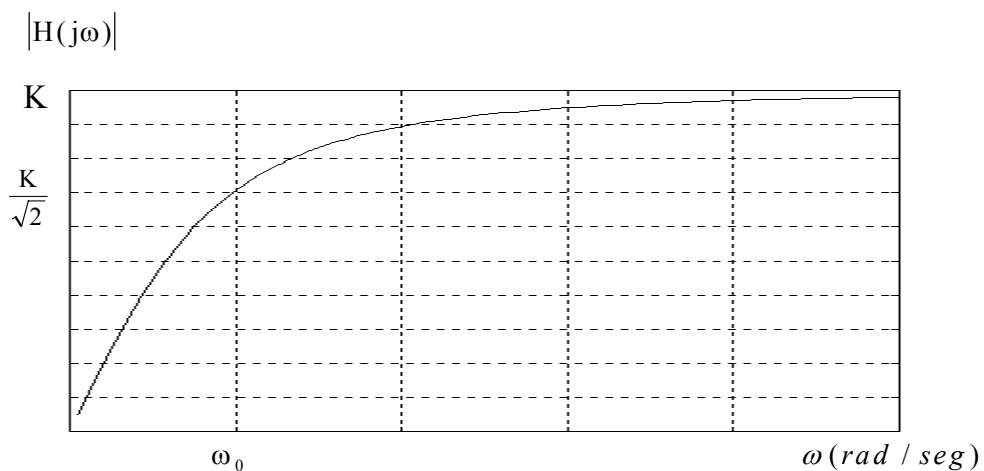
La expresión general de la función de transferencia para una sección paso alto de 1<sup>er</sup> orden es la siguiente:

$$H(s) = k \frac{s}{s + \omega_0}$$

Para  $s = j\omega$  obtenemos:

$$H(j\omega) = k \frac{j\omega}{j\omega + \omega_0} \Rightarrow \begin{cases} |H(j\omega)| = \frac{k\omega}{\sqrt{\omega^2 + \omega_0^2}} \\ \phi_H = \frac{\pi}{2} - \arctg \frac{\omega}{\omega_0} = \arctg \frac{\omega_0}{\omega} \end{cases}$$

Realizando una representación gráfica de la misma en función de la frecuencia obtenemos:



### 3.2. Secciones de 2º Orden

Las función de transferencia para secciones de segundo orden, en general tiene la siguiente expresión:

$$H(s) = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + b_1 s + b_0} = \frac{a_2 (s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)}$$

Esta función se conoce comúnmente como función bicuadrática y sirve para la obtención de gran variedad de filtros activos. Si los ceros y polos de la función son complejos, aparecerán conjugados (aunque en filtros activos RC pueden aparecer en ocasiones polos reales no son de interés, ya que en este caso pueden implementarse con circuitos pasivos RC), cumpliéndose  $z_2 = z_1^*$  y  $p_1 = p_2^*$ . Se puede expresar la función de la siguiente forma:

$$H(s) = k \frac{s^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1)s + \operatorname{Re}(z_1)^2 + \operatorname{Im}(z_1)^2}{s^2 + 2 \operatorname{Re}(p_1)s + \operatorname{Re}(p_1)^2 + \operatorname{Im}(p_1)^2} = k \frac{s^2 + (\omega_z/Q_z)s + \omega_z^2}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}$$

Esta última expresión es la notación estándar utilizada para las funciones bicuadráticas porque en ella se identifican claramente los parámetros característicos más importantes del filtro. La ganancia en continua y el valor asintótico de la ganancia cuando  $\omega$  tiende a infinito vienen dadas respectivamente por:

$$20 \log_{10} |H(j0)| = 20 \log_{10} \left( k \frac{\omega_z^2}{\omega_p^2} \right)$$

$$20 \log_{10} |H(j\infty)| = 20 \log_{10} (k)$$

La función ganancia alcanza su máximo aproximadamente a la frecuencia  $\omega_p$  :

$$\omega_p = \sqrt{\operatorname{Re}(p_1)^2 + \operatorname{Im}(p_1)^2}$$

que es la distancia radial desde la localización del polo al origen del plano  $s$ . La pulsación  $\omega_z$  determina aproximadamente el punto en el que la ganancia se hace mínima. La pulsación  $\omega_z$  está relacionada con la localización del cero por la expresión:

$$\omega_z = \sqrt{\operatorname{Re}(z_1)^2 + \operatorname{Im}(z_1)^2}$$

que representa el radio de distancia desde le origen al cero. El valor de cresta del máximo alcanzado a la pulsación  $\omega_p$  viene determinado por el factor de calidad del polo,  $Q_p$ , definido como:

$$Q_p = \frac{\omega_p}{2 \operatorname{Re}(p_1)} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}(p_1)^2 + \operatorname{Im}(p_1)^2}}{2 \operatorname{Re}(p_1)}$$

y la profundidad del valor mínimo para  $s \approx j\omega_z$  viene determinada por el factor de calidad del cero:

$$Q_z = \frac{\omega_z}{2 \operatorname{Re}(z_1)} = \frac{\sqrt{\operatorname{Re}(z_1)^2 + \operatorname{Im}(z_1)^2}}{2 \operatorname{Re}(z_1)}$$

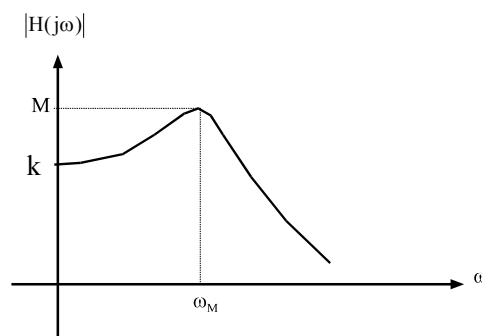
En muchos casos ocurre que  $Q_z = \infty$ , es decir,  $\operatorname{Re}(z_1) = 0$  y  $\omega_z = \operatorname{Im}(z_1)$  indica un punto de ganancia nula (es decir la atenuación es infinita). También se puede observar que para valores grandes de  $Q_p$  y  $Q_z$ , y cuando  $\omega_p \ll \omega_z$  o  $\omega_p \gg \omega_z$ , la posición del máximo de ganancia no depende de los ceros.

Existe diversos casos especiales obtenidos a partir de la expresión general de la función bicuadrática que tienen gran importancia y son los siguientes:

1.- Si  $a_2 = a_1 = 0$ ,  $H(s)$  representa una función paso-bajo de segundo orden (LP), generalmente expresada por:

$$H_{LP}(s) = \frac{k\omega_0^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

En la siguiente figura se representa la función de ganancia para este caso. Observar que  $H_{LP}(s)$  tiene un cero doble en el infinito, que la ganancia en el origen es  $k$ , y que para  $\omega \gg \omega_0$ ,  $|H_{LP}(j\omega)|$  decrece según  $1/\omega^2$  o  $-40$  dB/década. Se puede extrapolar esta observación para funciones paso bajo de orden  $n$ -simo. Donde  $|H(j\omega)|$  decrece para altas frecuencias a razón de  $-n \times 20$  dB/década.



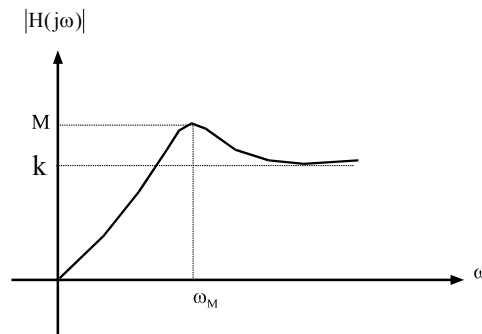
$$M = \frac{kQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \omega_M = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$



2.- Si  $a_1 = a_0 = 0$  da como resultado una función de transferencia paso alto (HP) cuya expresión será:

$$H_{HP}(s) = \frac{ks^2}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

Donde  $k$  es la ganancia para altas frecuencias  $|H_{HP}(j\infty)|$ . A continuación se realiza una representación gráfica de la ganancia. En este caso  $|H_{HP}(j\omega)|$  crece a razón de  $\omega^2$  para frecuencias bajas, lo que corresponde a una pendiente a frecuencias bajas de 40 dB/década.

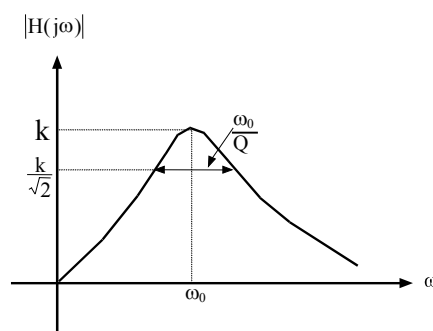


$$M = \frac{kQ}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad \omega_M = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

3.- Si  $a_2 = a_0 = 0$  se obtiene como resultado una función de transferencia pasobanda (BP) expresada como:

$$H_{BP}(s) = \frac{k(\omega_0/Q)s}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2}$$

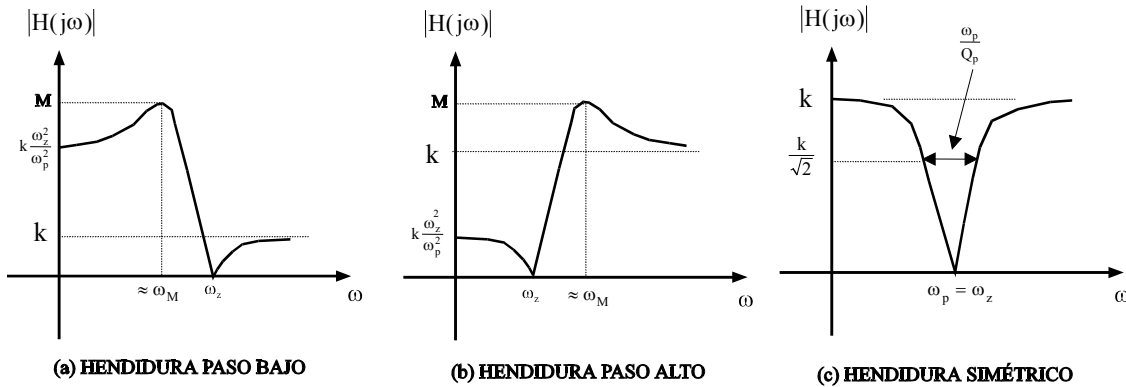
donde  $k = |H_{BP}(j\omega_p)|$  es la ganancia en la mitad de la banda de paso. Observa que  $H_{BP}(s)$  tiene un cero simple en el origen y otro en el infinito, por tanto para  $\omega \ll \omega_0$  la ganancia crece y para  $\omega \gg \omega_0$  la ganancia decrece a razón de 20 dB/década y  $H_{BP}(s)$  tiene atenuación infinita en continua y para  $s = \infty$ . A continuación se realiza una representación gráfica de la ganancia. Para valores altos de  $Q$ , eso es,  $Q \gg 1$ ,  $|H_{BP}(j\omega)|$  es aproximadamente simétrica alrededor de  $\omega_0$ .



4.- Una función de segundo orden que realiza una banda atenuada (BR) en la característica de ganancia se obtiene haciendo  $a_1 = 0$  en la función general, obteniéndose:

$$H_{BR}(s) = \frac{a_2 s^2 + a_0}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2} = \frac{k(s^2 + \omega_z^2)}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}$$

donde  $k = |H_{BR}(j\infty)|$  es la ganancia a frecuencias altas. Observa que esta función produce atenuación infinita (un cero de transmisión) a  $\omega = \omega_z$  y que la situación de la hendidura así como la altura del pico de la banda adyacente es controlada por  $Q_p$ . Distinguímos entre respuestas de ganancia en hendidura (notch) pasabajo (LPN), hendidura paso alto (HPN) y hendidura simétrica dependiendo de si  $\omega_z > \omega_p$ ,  $\omega_z < \omega_p$ , o  $\omega_z = \omega_p$  respectivamente.



5.- Si se desea obtener redes de corrección de fase (pasotodo o ecualizadores de retardo), será necesario determinar los coeficientes de la función de transferencia de forma que:

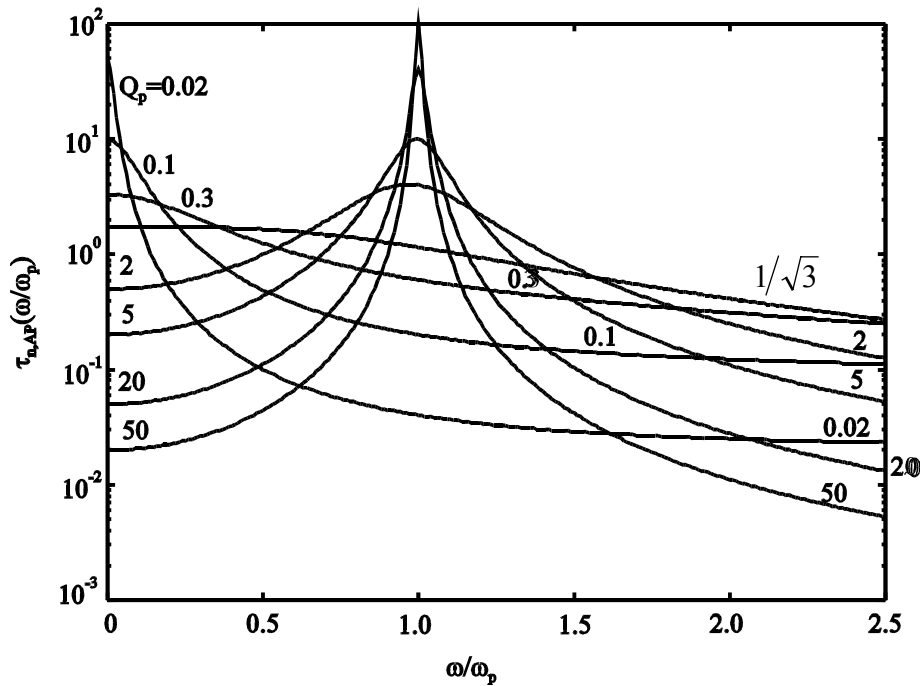
$$H_{AP}(s) = k \frac{s^2 - (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2}{s^2 + (\omega_p/Q_p)s + \omega_p^2} = k \frac{s_n^2 - s_n/Q_p + 1}{s_n^2 + s_n/Q_p + 1}$$

donde  $k$  es el valor de la ganancia (independiente de la frecuencia) de la función paso todo y  $s_n$  es la frecuencia normalizada respecto a  $\omega_p$  ( $s_n = s/\omega_p$ ). La fase y retardo de  $H_{AP}(s)$  son, con ( $\omega_n = \omega/\omega_p$ ):

$$\phi_{AP}(\omega_n) = -2 \operatorname{arctg} \frac{\omega_n/Q_p}{1 - \omega_n^2}$$

$$\tau_{n,AP}(\omega_n) = \omega_p \tau_{AP}(\omega_n) = \frac{2}{Q_p} \frac{1 + \omega_n^2}{(1 - \omega_n^2)^2 + (\omega_n/Q_p)^2}$$

En la siguiente gráfica se representan las curvas de la función de retardo normalizadas  $\tau_{n,AP}(\omega_n)/2$ , obtenidas para valores de  $Q_p = 0.02, 0.1, 0.3, 1/\sqrt{3}, 2, 5, 20$  y  $50$ . Para  $Q_p = 1/\sqrt{3}$ , la curva de retardo es máximamente plana, es decir es una buena aproximación de retardo constante en el rango de frecuencias  $0 \leq \omega_n \leq 1$ , mientras que las curvas de retardo son puntiagudas para  $Q_p > 1/\sqrt{3}$ , con un valor de pico de  $\tau_{AP,max} \approx 4Q_p/\omega_p$  para  $\omega_n \approx \sqrt{1 - 1/(4Q_p^2)}$ .



De lo anterior se desprende que la características de ganancia de filtros con alto  $Q_p$  se obtiene una distorsión de retardo muy grande, es decir que se alejan de la característica ideal de retardo constante. El propósito de los ecualizadores de retardo es entonces introducir un retardo apropiado para hacer que el retardo total sea lo más plano posible en la banda de frecuencias de interés. Para el diseño de ecualizadores de retardo para aplicar a un filtro con características de retardo establecidas, generalmente, será necesario el uso de un ordenador. Sin embargo, diseños no críticos de orden pequeño (siendo  $\Delta\tau/\tau \cong 10 - 20\%$ ) pueden realizarse manualmente con ayuda de las curvas anteriores.

## 4. Sensibilidad

En la síntesis de circuitos es necesario elegir una configuración adecuada para el circuito (en síntesis de filtros activos existen muchas posibilidades) y calcular correctamente el valor nominal de los elementos que forman parte de dicho circuito. Realmente el diseñador deberá elegir la mejor configuración entre las existentes ya que, en la práctica, el valor de los componentes reales será distinto a su valor nominal. Además, dichos valores dependerán de las condiciones de trabajo (temperatura, humedad, características no ideales de los AA.OO. ...). Dado que todos los coeficientes de la función de transferencia del circuito (y por tanto sus polos y ceros) dependen de los elementos del circuito, es de suponer que la función de transferencia del circuito sufrirá variaciones al variar los valores de los elementos. La diferencia entre la función deseada y la obtenida (error cometido) dependerá de la tolerancia de los componentes y de *la sensibilidad* del circuito a dichas tolerancias.

El concepto de SENSIBILIDAD es uno de los más importantes criterios de comparación entre los distintos tipos de circuitos existentes.

### 4.1. Definición.

Supongamos una característica  $P$  de un circuito que depende de un cierto parámetro  $x$ . Dicha característica dependerá también, normalmente, de la frecuencia  $s$  por lo que se puede poner  $P = P(s, x)$ .

La desviación en  $P$  causada por un error  $dx = x - x_0$  de  $x$  se puede obtener mediante el desarrollo de Taylor alrededor del valor nominal  $x_0$ :

$$P(s, x) = P(s, x_0) + \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_0} dx + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 P(s, x)}{\partial x^2} \right|_{x_0} (dx)^2 + \dots$$

Si asumimos que  $\frac{dx}{x_0} \ll 1$  y que la curvatura de  $P(s, x)$  cerca de  $x_0$  no es demasiado grande, podemos despreciar los términos del desarrollo a partir de la segunda derivada, con lo que :

$$\Delta P(s, x_0) = P(s, x_0 + dx) - P(s, x_0) \approx \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_0} dx$$

La mayor parte de las veces no se está tan interesado en cambios absolutos ( $\Delta P$ ) originados por cambios de  $x$  ( $dx = x - x_0$ ) sino en los cambios relativos, es decir:

$$\frac{\Delta P(s, x_0)}{P(s, x_0)} \approx \frac{x_0}{P(s, x_0)} \left. \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \right|_{x_0} \frac{dx}{x_0}$$

donde:

$$S_x^P = \frac{x_0}{P(s, x_0)} \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} \Big|_{x_0} = \frac{\partial P/P}{\partial x/x} \Big|_{x_0} = \frac{d(\text{Ln } P)}{d(\text{Ln } x)} \Big|_{x_0}$$

es la sensibilidad de P a un pequeño cambio en x.

Por tanto la sensibilidad se define:

$$S_x^P = \frac{x}{P} \frac{\partial P(s, x)}{\partial x} = \frac{d(\text{Ln } P)}{d(\text{Ln } x)}$$

Para pequeñas variaciones de x:

$$\frac{\Delta P}{P} = S_x^P \frac{\Delta x}{x}$$

que nos indica la VARIABILIDAD (cambio porcentual o relativo de P debido a un determinado cambio porcentual o relativo de x).

Se observa por tanto, que los mejores circuitos serán aquellos que presenten menores sensibilidades a sus componentes. Si  $S_x^P$  es pequeña podrán utilizarse componentes con tolerancias mayores sin que ello produzca grandes variaciones de la respuesta deseada  $\left(\frac{\Delta P}{P}\right)$  y dichos componentes serán más baratos.

#### NOTAS:

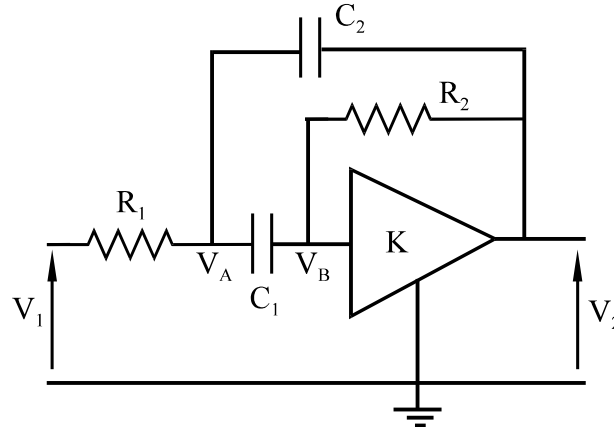
- Si P depende de la frecuencia,  $S_x^P$  también dependerá de ella, por lo que la sensibilidad deberá evaluarse en el rango de frecuencias de interés. (La sensibilidad de una función de transferencia a la ganancia de un AA.OO. en continua, por ejemplo, tendrá poca significación en el comportamiento del filtro trabajando a 10 KHz).

- P puede depender de más de un parámetro, y por tanto, si algún otro parámetro varía, también lo hará la  $S_x^P$ , por lo que habrá que calcular de nuevo su valor (o trabajar con sensibilidad multiparamétrica, cosa que no vamos a hacer). También indica que habrá que trabajar con todos los parámetros cuyo valor podamos modificar para conseguir unas sensibilidades más reducidas en el diseño.

- Hay que tener en cuenta que realmente es más importante la variabilidad que la sensibilidad. Una sensibilidad muy grande a un parámetro muy estable puede resultar aceptable, mientras que sensibilidades reducidas a parámetros de amplia tolerancia pueden resultar muy perjudiciales a la larga.

**EJEMPLO:**

El siguiente circuito representa el diseño de un filtro paso banda de 2º orden con frecuencia central  $f_0 = 3$  KHz y factor de calidad  $Q = 20$ . Calcular  $S_x^{00}$ ,  $S_k^Q$  y  $S_k^{Hl}$  donde x son todos los componentes pasivos y K es un amplificador de tensión de ganancia k.



$$G_1 = 1/R_1 \quad ; \quad G_2 = 1/R_2 \quad ; \quad C_1 = C_2 = C$$

**SOLUCIÓN:**

Se plantean en primer lugar las ecuaciones de los nudos A y B ( $V_A$  y  $V_B$ ):

$$\begin{cases} 0 = -G_1 V_1 + (G_1 + 2Cs)V_A - CsV_B - CsV_2 \\ 0 = -CsV_A + (G_2 + Cs)V_B - G_2 V_2 \\ V_2 = KV_B \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = -G_1 V_1 + (G_1 + 2Cs)V_A - Cs \frac{V_2}{K} - CsV_2 \\ 0 = -CsV_A + (G_2 + Cs) \frac{V_2}{K} - G_2 V_2 \end{cases}$$

$$V_A = \frac{G_2 \left[ \frac{1}{K} - 1 \right] + \frac{Cs}{K}}{Cs} V_2$$

$$0 = -G_1 V_1 + (G_1 + 2Cs) \frac{G_2 \left[ \frac{1}{K} - 1 \right] + \frac{Cs}{K}}{Cs} V_2 - Cs \left( \frac{1}{K} + 1 \right) V_2$$

$$G_1 Cs V_1 = (G_1 + 2Cs) \left[ G_2 \left[ \frac{1}{K} - 1 \right] + \frac{Cs}{K} \right] V_2 - C^2 s^2 \left( \frac{1}{K} + 1 \right) V_2$$

$$G_1 Cs V_1 = \left[ G_1 G_2 \frac{1-K}{K} + \frac{G_1 Cs}{K} + 2G_2 Cs \frac{1-K}{K} + \frac{2C^2 s^2}{K} - C^2 s^2 \frac{K+1}{K} \right] V_2$$

$$G_1 C s V_1 = \left\{ \left[ \frac{2C^2}{K} - C^2 \frac{K+1}{K} \right] s^2 + \left[ \frac{G_1 C}{K} + 2G_2 C \frac{1-K}{K} \right] s + G_1 G_2 \frac{1-K}{K} \right\} V_2$$

$$H(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{G_1 C s}{\left[ C^2 \frac{1-K}{K} \right] s^2 + C \left[ \frac{G_1}{K} + 2G_2 \frac{1-K}{K} \right] s + G_1 G_2 \frac{1-K}{K}}$$

$$H(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{s/R_1 C}{\frac{1-K}{K} s^2 + \left[ \frac{1}{R_1 C K} + \frac{2}{R_2 C} \frac{1-K}{K} \right] s + \frac{1}{R_1 R_2 C^2} \frac{1-K}{K}}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $\frac{K}{1-K}$  y llamando  $\tau_1 = R_1 C$  y  $\tau_2 = R_2 C$  obtenemos:

$$H(S) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{K}{1-K} \frac{s/\tau_1}{s^2 + \left[ \frac{2}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{1-K} \right] s + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}} = \frac{K}{K-1} \frac{s/\tau_1}{s^2 + \left[ \frac{2}{\tau_2} - \frac{1}{\tau_1} \frac{1}{K-1} \right] s + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}}$$

de donde comparando con la expresión general en función de  $\omega_0$  y  $Q$  obtenemos:

$$H(s) = \frac{Ks}{s^2 + (\omega_0/Q)s + \omega_0^2} \Rightarrow \omega_0^2 = \frac{1}{\tau_1 \tau_2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C^2}}$$

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{2}{\tau_2} - \frac{1}{K-1} \frac{1}{\tau_1} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\frac{2}{\tau_2} - \frac{1}{K-1} \frac{1}{\tau_1}} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2} \left( \frac{2}{\tau_2} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1 \tau_2}} \frac{1}{K-1} \frac{1}{\tau_1} \right)} = \frac{1}{\sqrt{\tau_1} \left( 2 - \frac{1}{K-1} \sqrt{\frac{\tau_2}{\tau_1}} \right)}$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{R_1} \left( 2 - \frac{1}{K-1} \sqrt{\frac{R_2}{R_1}} \right)} = \frac{\sqrt{R_2}}{\sqrt{R_1} \left( 2 - \frac{1}{K-1} \frac{R_2}{R_1} \right)} = \frac{r}{2 - \frac{1}{K-1} r^2} \text{ SIENDO } r = \sqrt{\frac{R_2}{R_1}}$$

La  $S_k^{\omega_0} = 0$  ya que  $\omega_0$  es independiente de  $K$ .

$$S_{R_1}^{\omega_0} = \frac{R_1}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial R_1} = \frac{R_1}{\omega_0} \left[ -\frac{\sqrt{R_2 C^2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{R_1}}}{R_1 R_2 C^2} \right] = \frac{R_1}{\omega_0} \left[ -\frac{\sqrt{R_2 C^2} \omega_0^2}{2\sqrt{R_1}} \right] = -\frac{1}{2} \sqrt{R_1 R_2 C^2} \omega_0 = -\frac{1}{2}$$

$$S_C^{\omega_0} = \frac{C}{\omega_0} \frac{\partial \omega_0}{\partial C} = \frac{C}{\omega_0} \left[ -\frac{\sqrt{R_1 R_2}}{R_1 R_2 C^2} \right] = -\frac{1}{\omega_0 \sqrt{R_1 R_2 C^2}} = -1$$

$$\left( \text{Si } C_1 \neq C_2 \neq C \Rightarrow S_{C_i}^{Q_0} = -1/2 \right)$$

Para el cálculo de la sensibilidad de Q respecto de K podemos observar que Q depende de K y r. Su valor debe ser 20, según el enunciado. Si elegimos  $r = 1$  ( $R_1 = R_2$ ), nos queda:

$$Q = \frac{1}{2 - \frac{1}{K-1}} = \frac{K-1}{2K-3} = 20 \Rightarrow K-1 = 40K-60 \Rightarrow K = \frac{59}{39} = 1,5128$$

$$S_K^Q = \frac{K}{Q} \frac{\partial Q}{\partial K} = \frac{K}{Q} \frac{2K-3-2(K-1)}{(2K-3)^2} \Bigg|_{K=1,5128} = -115$$

Lo que implica que pequeñas variaciones en la ganancia del amplificador da lugar a grandes cambios del Q.

Dejando r como constante (sin dar valor), se obtiene:

$$S_K^Q = -rQ \frac{K}{(K-1)^2}$$

Si tomamos  $r = 6$  implica:

$$Q = \frac{r}{2 - \frac{r^2}{K-1}} = \frac{6}{2 - \frac{36}{K-1}} = 20 \Rightarrow \frac{6(K-1)}{2K-2-36} = 20 \Rightarrow K \approx 22,176$$

En este caso la  $S_K^Q \approx -5,9$ , obteniéndose en este caso un resultado mucho mejor que en el caso anterior. Esto supone que hay que tener en cuenta la dependencia de Q con respecto a ambos parámetros.

## 4.2. Propiedades

Además de la definición de sensibilidad:

$$S_x^P = \frac{x}{P} \frac{dP(s, x)}{dx} = \frac{d(\text{Ln } P)}{d(\text{Ln } x)}$$

se puede utilizar la denominada sensibilidad semirelativa, que se define como:

$$Q_x^P = x \frac{dP(s, x)}{dx}$$

y que puede ser útil en determinados casos. Si por ejemplo queremos obtener la sensibilidad en un punto donde  $P \rightarrow 0$  ó próximo a él, entonces  $S_x^P \rightarrow \infty$ , resultando de muy poca utilidad (un ejemplo podría ser la sensibilidad de una función de transferencia en o cerca de un cero de transmisión).



Aunque  $S_x^P$  siempre puede calcularse directamente, hay una serie de propiedades que pueden simplificar estos cálculos. Si  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  son funciones de  $x$  y  $k$  y  $n$  son constantes:

$$1.- S_x^{kx} = 1 \text{ ya que } S_x^{kx} = \frac{x}{kx} k = 1$$

$$2.- S_x^{kx^n} = n \text{ ya que } S_x^{kx^n} = \frac{x}{kx^n} n k x^{n-1} = n$$

$$3.- S_x^{P_1 P_2} = S_x^{P_1} + S_x^{P_2} \text{ ya que } S_x^{P_1 P_2} = \frac{x}{P_1 P_2} \left( P_1 \frac{dP_2}{dx} + P_2 \frac{dP_1}{dx} \right) = \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dx} + \frac{x}{P_2} \frac{dP_2}{dx} = S_x^{P_1} + S_x^{P_2}$$

$$4.- S_x^{P_1/P_2} = S_x^{P_1} - S_x^{P_2} \text{ ya que:}$$

$$S_x^{P_1/P_2} = \frac{x}{P_1/P_2} \left( \frac{P_2 \frac{dP_1}{dx} - P_1 \frac{dP_2}{dx}}{P_2^2} \right) = \frac{x}{P_1 P_2} \left( P_2 \frac{dP_1}{dx} - P_1 \frac{dP_2}{dx} \right) = \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dx} - \frac{x}{P_2} \frac{dP_2}{dx} = S_x^{P_1} - S_x^{P_2}$$

$$5.- S_x^{kP_1} = S_x^{P_1} \text{ ya que } S_x^{kP_1} = \frac{x}{kP_1} k \frac{dP_1}{dx} = S_x^{P_1}$$

$$6.- S_x^{k+P_1} = \frac{P_1}{k+P_1} S_x^{P_1} \text{ ya que } S_x^{k+P_1} = \frac{x}{k+P_1} \frac{dP_1}{dx} = \frac{P_1}{k+P_1} \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dx} = \frac{P_1}{k+P_1} S_x^{P_1}$$

$$7.- S_x^{P_1+P_2+\dots} = \frac{1}{P_1+P_2+\dots} (P_1 S_x^{P_1} + P_2 S_x^{P_2} + \dots) \text{ ya que:}$$

$$\begin{aligned} S_x^{P_1+P_2+\dots} &= \frac{x}{P_1+P_2+\dots} \left( \frac{dP_1}{dx} + \frac{dP_2}{dx} + \dots \right) = \frac{1}{P_1+P_2+\dots} \left( P_1 \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dx} + P_2 \frac{x}{P_2} \frac{dP_2}{dx} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{P_1+P_2+\dots} (P_1 S_x^{P_1} + P_2 S_x^{P_2} + \dots) \end{aligned}$$

$$8.- S_x^{P_1^n} = n S_x^{P_1} \text{ ya que } S_x^{P_1^n} = \frac{x}{P_1^n} n P_1^{n-1} \frac{dP_1}{dx} = n S_x^{P_1}$$

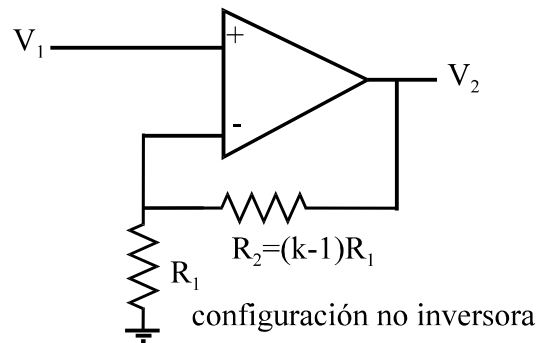
$$9.- S_x^{P_1(P_2(x))} = S_{P_2}^{P_1} S_x^{P_2} \text{ siendo } P_1 = f(P_2) \text{ y } P_2 = f(x) :$$

$$S_x^{P_1(P_2(x))} = \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dP_2} \frac{dP_2}{dx} = \frac{x}{P_1} \frac{dP_1}{dP_2} \frac{dP_2}{dx} \frac{P_2}{P_2} = \frac{P_2}{P_1} \frac{dP_1}{dP_2} \cdot \frac{x}{P_2} \frac{dP_2}{dx} = S_{P_2}^{P_1} \cdot S_x^{P_2}$$

### 4.3. Producto Ganancia - Sensibilidad

La ganancia en lazo abierto ( $A$ ) de un AA.OO. es muy grande y tiene una amplia variabilidad  $\left(\frac{dA}{A}\right)$  (variación de la ganancia respecto de la ganancia). Por esta razón se suelen utilizar con realimentación, para así, conseguir una ganancia en lazo cerrado ( $\mu$ ) menor y con menor variabilidad  $\left(\frac{d\mu}{\mu}\right)$ .

Por ejemplo:



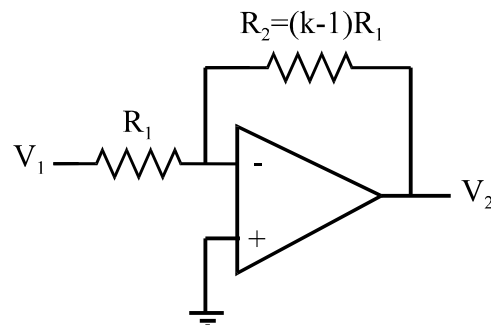
$$V_2 = A \left( V_1 - \frac{V_2}{R_1 + R_2} R_1 \right) = A \left( V_1 - \frac{R_1}{R_1 + KR_1 - R_1} V_2 \right) = A \left( V_1 - \frac{1}{K} V_2 \right)$$

$$V_2 = AV_1 - \frac{A}{K} V_2 \Rightarrow V_2 \left( 1 + \frac{A}{K} \right) = AV_1$$

$$\mu = \frac{V_2}{V_1} = \frac{A}{1 + \frac{A}{K}} = \frac{KA}{K + A} = \frac{K}{1 + \frac{K}{A}} \Bigg|_{K \ll A} \approx K$$

$$S_A^\mu = \frac{A}{\mu} \frac{K(K + A) - KA}{(K + A)^2} = \frac{A}{\mu} \frac{K^2}{(K + A)^2} = \frac{K}{K + A} = \frac{\mu}{A}$$

Para la configuración inversora:



$$\mu' = \frac{V_2}{V_1} = -\frac{K-1}{1 + \frac{K}{A}} \bigg|_{K \ll A} \approx -(K-1)$$

$$S_A^{\mu'} = \frac{A}{\mu'} \left( -\frac{K(K-1)}{(K+A)^2} \right) \approx -\frac{\mu'}{A} \quad \forall \quad K \gg 1$$

Observar que la sensibilidad de  $\mu$  a  $A$  es proporcional a  $\mu$ , es decir, se incrementa con la ganancia en lazo cerrado.

Si una función característica ( $P$ ) de un filtro depende de la ganancia en lazo cerrado ( $\mu$ ), podemos poner:

$$S_A^P = S_\mu^P S_A^\mu = \frac{\mu}{A} S_\mu^P$$

y por tanto la variabilidad es:

$$\frac{dP}{P} = \frac{\mu}{A} S_\mu^P \frac{dA}{A} = \left( \mu S_\mu^P \right) \frac{dA}{A^2}$$

Vemos por tanto que la variabilidad de la función  $P$  es proporcional al producto ganancia - sensibilidad y a un término  $\frac{dA}{A^2}$  que sólo depende del AA.OO. utilizado. Por ello la variabilidad para un AA.OO. dado depende no sólo de la sensibilidad de  $P$  a  $\mu$ , sino también de la ganancia  $\mu$  que se necesita para el diseño. Por ello el producto ganancia - sensibilidad se utiliza como un parámetro de comparación más representativo que únicamente la sensibilidad. Además se cumple:

$$\mu S_\mu^P = A S_A^P$$

ya que:

$$A S_A^P = A S_\mu^P S_A^\mu = A \frac{\mu}{A} S_\mu^P = \mu S_\mu^P$$

Lo que induce a pensar que para el diseño de filtros activos es preferible utilizar AA.OO. cuya ganancia en lazo abierto ( $A$ ) en el rango de frecuencias de interés sea lo mayor posible para que el término  $\frac{dA}{A^2}$  sea lo menor posible.

#### 4.4. Sensibilidad de la Función de Transferencia.

Según sabemos, la función de transferencia tiene la forma:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + \dots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + \dots + b_1 s + b_0} = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Tanto numerador como denominador dependerán de los elementos del circuito (x), con lo que la sensibilidad de H respecto a x se obtiene como:

$$S_x^H = S_x^N - S_x^D = x \left( \frac{1}{N} \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{1}{D} \frac{\partial D}{\partial x} \right)$$

o también, utilizando las propiedades de la sensibilidad, se puede poner en función de los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$  :

$$S_x^H = \frac{x}{N} \sum_i \frac{\partial a_i}{\partial x} s^i - \frac{x}{D} \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x} s^j \quad (1)$$

donde los sumatorios afectan a todos los coeficientes  $a_i$  y  $b_j$  que dependen de x.

Si expresamos la función  $H(s,x)$  particularizada para el eje  $j\omega$ , es decir:

$$H(j\omega, x) = |H(j\omega, x)| e^{j\phi(\omega, x)}$$

y calculamos la sensibilidad respecto a x:

$$S_x^{H(j\omega, x)} = S_x^{|H(j\omega, x)|} + S_x^{e^{j\phi(\omega, x)}}$$

$$S_x^{e^{j\phi(\omega, x)}} = \frac{x}{e^{j\phi(\omega, x)}} j \frac{d\phi(\omega, x)}{dx} e^{j\phi(\omega, x)} = jx \frac{d\phi(\omega, x)}{dx} = jQ_x^{\phi(\omega, x)}$$

siendo Q la desviación semirelativa y por tanto:

$$S_x^{H(j\omega, x)} = S_x^{|H(j\omega, x)|} + jQ_x^{\phi(\omega, x)}$$

donde se observa que la parte real de la sensibilidad de la función de transferencia es sensibilidad de amplitud:

$$\operatorname{Re}\left[S_x^{H(j\omega, x)}\right] = S_x^{|H(j\omega, x)|}$$

y la parte imaginaria es la sensibilidad semirelativa de la fase:

$$\operatorname{Im}\left[S_x^{H(j\omega, x)}\right] = Q_x^{\phi(\omega, x)} = x \frac{\partial \phi(\omega, x)}{\partial x}$$

La ecuación (1) que hemos visto nos permite calcular la sensibilidad de  $H(s)$  cuando los coeficientes cambian debido a la tolerancia de los elementos. El cambio en los coeficientes supone una variación (desplazamiento) de los polos y ceros de  $H(s)$  respecto de su posición original.

Las consecuencias de estos cambios en polos y ceros sobre  $H(s)$  las podemos evaluar si tomamos logaritmo Neperiano en la forma factorizada:

$$H(s) = k \frac{(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)} \Rightarrow \ln(H(s)) = \ln k + \sum_{i=1}^m \ln(s - z_i) - \sum_{i=1}^n \ln(s - p_i)$$

donde  $k = \frac{a_m}{b_n}$  y  $z_i$ ,  $p_i$  y  $k$  serán función de los elementos del filtro ( $x$ ). Derivando ambos miembros de la igualdad respecto a  $x$  obtenemos:

$$\frac{1}{H(s)} \frac{dH(s)}{dx} = \frac{1}{k} \frac{dk}{dx} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{s - z_i} \left( - \frac{dz_i}{dx} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{1}{s - p_i} \left( - \frac{dp_i}{dx} \right)$$

Multiplicando por  $x$  ambos miembros de la igualdad se tiene:

$$\frac{x}{H(s)} \frac{dH(s)}{dx} = \frac{x}{k} \frac{dk}{dx} + \sum_{i=1}^m \frac{x}{s - z_i} \left( - \frac{dz_i}{dx} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{x}{s - p_i} \left( - \frac{dp_i}{dx} \right)$$

$$S_x^{H(s)} = S_x^k - \sum_{i=1}^m \frac{Q_x^{z_i}}{s - z_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_x^{p_i}}{s - p_i}$$

que indica que un desplazamiento de un polo o cero influye más fuertemente en la función de transferencia en las proximidades de los polos o ceros ( $s - z_i$  ó  $s - p_i$  tenderán a cero).

#### 4.5. Sensibilidad en Filtros Activos de 2º Orden.

Sabemos que la función de transferencia de un filtro de 2º orden (sección bicuadrática) es:

$$H(s) = \frac{a_2(s - z_1)(s - z_2)}{(s - p_1)(s - p_2)} = \frac{a_2 s^2 + a_1 s + a_0}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p} s + \omega_p^2}$$

donde el caso de interés es aquel en el que los polos de  $H(s)$  son complejos y por tanto conjugados,  $p_1 = p_2^*$  y  $Q > 0,5$ .

$$p_1 = -\omega_p \left( \frac{1}{2Q_p} - j \sqrt{1 - \frac{1}{4Q_p^2}} \right) = -\frac{\omega_p}{2Q_p} + j \frac{\omega_p}{2Q_p} \sqrt{4Q_p^2 - 1}$$

Los polos son los que más influyen en el comportamiento del filtro en la banda de paso, y por tanto la precisión de su situación es importante, y por ello,  $p_1$  debería ser insensible a las variaciones de cualquier parámetro  $x$ .

Suponiendo que  $Q_p$  y  $\omega_p$  son funciones de  $x$ , podemos calcular  $Q_x^{p_1}$  como:

$$Q_x^{p_1} = x \frac{dp_1}{dx}$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{\frac{d\omega_p}{dx} 2Q_p - 2\frac{dQ_p}{dx} \omega_p}{4Q_p^2} + j \left[ \frac{\frac{d\omega_p}{dx} 2Q_p - 2\frac{dQ_p}{dx} \omega_p}{4Q_p^2} \sqrt{4Q_p^2 - 1} + \frac{1}{2} \frac{8Q_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \frac{dQ_p}{dx} \frac{\omega}{2Q_p} \right]$$

$$\frac{dp_1}{dx} = -\frac{1}{2Q_p} \frac{d\omega_p}{dx} + \frac{\omega_p}{2Q_p^2} \frac{dQ_p}{dx} + j \left\{ \left[ \frac{1}{2Q_p} \frac{d\omega_p}{dx} - \frac{\omega_p}{2Q_p^2} \frac{dQ_p}{dx} \right] \sqrt{4Q_p^2 - 1} + \frac{2\omega_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \frac{dQ_p}{dx} \right\}$$

Agrupando términos en  $\frac{dQ_p}{dx}$  y  $\frac{d\omega_p}{dx}$ :

$$\frac{dp_1}{dx} = \underbrace{\frac{d\omega_p}{dx} \left[ -\frac{1}{2Q_p} + j \frac{1}{2Q_p} \sqrt{4Q_p^2 - 1} \right]}_{(1)} + \underbrace{\frac{dQ_p}{dx} \left[ \frac{\omega_p}{2Q_p^2} + j \left( -\frac{\omega_p}{2Q_p^2} \sqrt{4Q_p^2 - 1} + \frac{2\omega_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right) \right]}_{(2)}$$

(3)

Multiplicando y dividiendo (1) por  $\omega_p$ :

$$(1) = \frac{1}{\omega_p} \frac{d\omega_p}{dx} \left[ -\frac{\omega_p}{2Q_p} + j \frac{\omega_p}{2Q_p} \sqrt{4Q_p^2 - 1} \right] = p_1 \frac{1}{\omega_p} \frac{d\omega_p}{dx}$$

Multiplicando y dividiendo (2) por  $Q_p$ :

$$(2) = -\frac{1}{Q_p} \left[ \frac{\omega_p}{2Q_p} \sqrt{4Q_p^2 - 1} - \frac{2\omega_p Q_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right] = -\frac{1}{Q_p} \left[ \frac{\omega_p (4Q_p^2 - 1) - 2\omega_p Q_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right] = -\frac{1}{Q_p} \left[ \frac{2Q_p \omega_p - \frac{\omega_p}{2Q_p} - 2Q_p \omega_p}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right] = \frac{1}{Q_p} \frac{\frac{\omega_p}{2Q_p}}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}}$$

$$(3) = \frac{1}{Q_p} \left[ \frac{\omega_p}{2Q_p} + j \frac{\omega_p}{2Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right] = j \frac{1}{Q_p} \left[ -j \frac{\omega_p}{2Q_p} + \frac{\omega_p}{2Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right] = j \frac{1}{Q_p} \frac{-p_1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}}$$

$$\frac{dp_1}{dx} = \frac{p_1}{\omega_p} \frac{d\omega_p}{dx} - j \frac{p_1}{Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \frac{dQ_p}{dx}$$

$$Q_x^{p_1} = p_1 \frac{x}{\omega_p} \frac{d\omega_p}{dx} - j p_1 \frac{x}{Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \frac{dQ_p}{dx}$$

$$Q_x^{p_1} = p_1 \left[ S_x^{\omega_p} - j \frac{S_x^{Q_p}}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right]$$

De la misma forma se demuestra que  $Q_x^{p_2} = (Q_x^{p_1})^*$ .

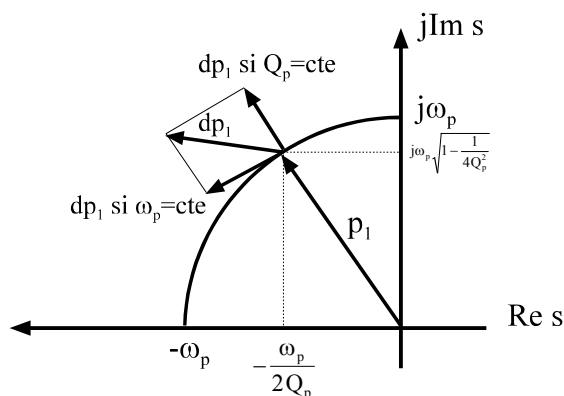
Se observa por tanto que la situación de un polo es  $\sqrt{4Q_p^2 - 1} \approx 2Q_p$  veces mas sensitiva a las variaciones de  $\omega_p$  que a las variaciones de  $Q_p$ . De la ecuación anterior obtenemos:

$$x \frac{dp_1}{dx} = p_1 \left[ \frac{x}{\omega_p} \frac{d\omega_p}{dx} - j \frac{x}{Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \frac{dQ_p}{dx} \right]$$

es decir, la variación de la posición de un polo vendrá dada por:

$$dp_1 = p_1 \left[ \frac{d\omega_p}{\omega_p} - j \frac{dQ_p}{Q_p} \frac{1}{\sqrt{4Q_p^2 - 1}} \right]$$

que indica que si  $dQ_p = 0$ , el polo  $p_1$  se mueve de forma radial acercándose o alejándose del origen:  $dp_1 = p_1 \frac{d\omega_p}{\omega_p}$ , y si  $d\omega_p = 0$ , el polo se mueve de forma tangencial a un círculo de radio  $\omega_p$  alrededor del origen. En la siguiente figura se ilustra de forma gráfica:



Una vez conseguida la expresión de  $Q_x^{p_1}$ , vemos que ocurre con la función de transferencia. Supongamos que ni los ceros de  $H(s)$  ni la ganancia  $k$  dependen de  $x$ . En este caso la relación:

$$S_x^H = S_k^H - \sum_{i=1}^m \frac{Q_x^{z_i}}{s - z_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_x^{p_i}}{s - p_i}$$

queda reducida a:

$$S_x^H = \frac{Q_x^{p_1}}{s - p_1} + \frac{Q_x^{p_2}}{s - p_2} = \frac{Q_x^{p_1}}{s - p_1} + \frac{(Q_x^{p_1})^*}{s - p_1^*}$$

Si ponemos común denominador;  $(s - p_1)(s - p_1^*) = s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2$

$$S_x^H = - \frac{\left(2\omega_p^2 + \frac{s\omega_p}{Q_p}\right)S_x^{\omega_p} - \frac{s\omega_p}{Q_p}S_x^{Q_p}}{s^2 + \frac{\omega_p}{Q_p}s + \omega_p^2}$$

de donde podemos obtener la sensibilidad de la función amplitud:

$$S_x^{|H(j\omega)|} = - \frac{2(1 - \omega_n^2) + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}} S_x^{\omega_p} + \frac{\frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}} S_x^{Q_p} = S_{\omega_p}^{|H|} S_x^{\omega_p} + S_{Q_p}^{|H|} S_x^{Q_p}$$

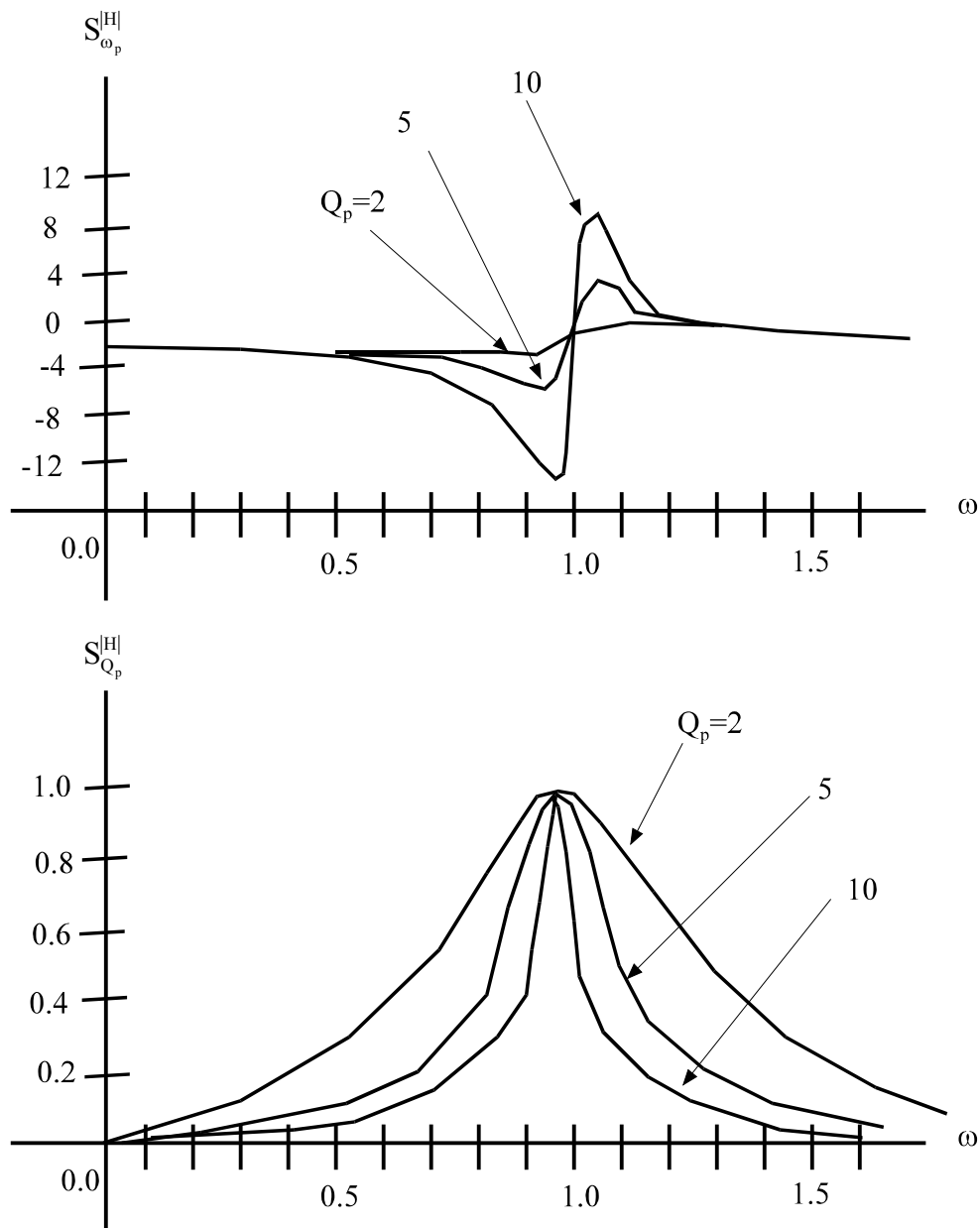
donde  $\omega_n = \omega/\omega_p$  es la frecuencia normalizada respecto a  $\omega_p$ . Por tanto:

$$S_{\omega_p}^{|H(j\omega)|} = - \frac{2(1 - \omega_n^2) + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}$$

$$S_{Q_p}^{|H(j\omega)|} = \frac{\frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}{(1 - \omega_n^2)^2 + \frac{\omega_n^2}{Q_p^2}}$$

Dichas funciones dependen en gran medida de la frecuencia como puede verse en las siguiente gráficas:





Se puede demostrar que  $\max\{S_{Q_p}^{[H]}\} = 1$  cuando  $\omega = \omega_p$  y para  $Q_p$  grandes :

$$\max\{S_{\omega_p}^{[H]}\} \approx \frac{Q_p}{1 + \frac{1}{Q_p}} \text{ para } \omega \approx \omega_p \left(1 + \frac{1}{2Q_p}\right)$$

$$\min\{S_{\omega_p}^{[H]}\} \approx \frac{Q_p}{1 + \frac{1}{Q_p}} \text{ para } \omega \approx \omega_p \left(1 - \frac{1}{2Q_p}\right)$$

Estos valores extremos se producen a una frecuencia que es la frecuencia de corte a 3dB. La relación:

$$\frac{S_{\omega_p}^{|H|}}{S_{Q_p}^{|H|}} = 2Q_p^2 \left( 1 - \frac{1}{\omega_n^2} \right) - 1$$

puede aproximarse para frecuencias próximas a las de corte a 3dB  $\left[ \omega \approx \omega_p \left( 1 \pm \frac{1}{2Q_p} \right) \right]$  por:

$$\frac{S_{\omega_p}^{|H|}}{S_{Q_p}^{|H|}} \approx 2Q_p - 1 \approx 2Q_p$$

Estos resultados nos llevan a determinar que en el diseño de secciones bicuadráticas de alto Q, es más importante conseguir bajos valores de  $S_x^{\omega_p}$  que de  $S_x^{Q_p}$ .

Si las variables de  $\omega_p$  y  $Q_p$  han de tener efectos comparables en la función de transferencia, la variabilidad de  $\omega_p \left( \frac{d\omega_p}{\omega_p} \right)$  debería ser aproximadamente  $Q_p$  veces menor que la de  $Q_p \left( \frac{dQ_p}{Q_p} \right)$ , ya que:

$$\frac{d|H(j\omega)|}{|H(j\omega)|} = S_{\omega_p}^{|H|} \frac{d\omega_p}{\omega_p} + S_{Q_p}^{|H|} \frac{dQ_p}{Q_p}$$

#### 4.6. Filtros de Orden Superior

Una vez vistos algunos criterios importantes para la selección de secciones de 2º orden, vamos a trazar unas líneas a seguir para el diseño de filtros de orden superior. Su función de transferencia es de la forma:

$$H(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{\prod_{k=1}^{m/2} (\alpha_{2k} s^2 + \alpha_{1k} s + \alpha_{0k})}{\prod_{i=1}^{n/2} \left( s^2 + \frac{\omega_{pi}}{Q_{pi}} s + \omega_{pi}^2 \right)}$$

Consideremos el caso de n par. (Si n es impar aparecerá un término  $s+\alpha$  en el denominador).

Según sabemos, la sensibilidad de la función de transferencia es:

$$S_x^H = \frac{x}{N(s)D(s)} \left[ D(s) \frac{\partial N(s, x)}{\partial x} - N(s) \frac{\partial D(s)}{\partial x} \right] = S_x^k - \sum_{i=1}^m \frac{Q_x^{z_i}}{s - z_i} + \sum_{i=1}^n \frac{Q_x^{p_i}}{s - p_i}$$

Según se dijo, el valor de  $S_x^H$  será muy grande en las proximidades de los polos y ceros, por tanto, en filtros de orden grande la sensibilidad dentro de la banda de paso será

generalmente alta ya que casi todos o todos los polos del filtro estarán situados en la banda de paso cerca del eje  $j\omega$ .

Luego en una realización directa de un filtro de orden superior las sensibilidades de  $H$  serán muy grandes, y por tanto, pequeñas variaciones de un componente darán lugar a variaciones inaceptables de la función de transferencia. Además, ninguno de los valores  $Q_x^{z_i}$  y  $Q_x^{p_i}$  serán cero, ya que, en general todos ellos dependerán de todos los elementos.

Con un diseño en cascada se pretende conseguir que cada elemento  $x$  influya únicamente en un par de polos y/o par de ceros. Por tanto descomponemos  $H(s)$  como:

$$H(s) = \prod_{k=1}^{n/2} H_k(s) = \prod_{k=1}^{n/2} \frac{a_{2k}s^2 + a_{1k}s + a_{0k}}{s^2 + \frac{\omega_{pk}}{Q_{pk}}s + \omega_{pk}^2}$$

donde cada  $H_k(s)$  se realiza mediante una sección de 2º orden que sea independiente de las demás.

$$H(s) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{V_1}{V_{in}} \frac{V_2}{V_1} \frac{V_3}{V_2} \dots \frac{V_{\frac{n}{2}-1}}{V_{\frac{n}{2}-2}} \frac{V_{out}}{V_{\frac{n}{2}-1}} = H_1 H_2 H_3 \dots H_{\frac{n}{2}-1} H_{\frac{n}{2}}$$

Por tanto:

$$S_x^H = S_{H_i}^H S_x^{H_i}$$

$$S_{H_i}^H = \frac{H_i}{H} \frac{dH}{dH_i} = \frac{H_i}{H} \left( H_1 H_2 \dots H_{i-1} H_{i+1} \dots H_{\frac{n}{2}} \right) = 1$$

$$S_x^H = S_x^{H_i}$$

donde se observa que la sensibilidad de  $H$  respecto a  $x$  depende únicamente de la sensibilidad de la sección bicuadrática  $i$  a ese elemento. Por tanto en realizaciones en cascada deberán elegirse secciones bicuadráticas lo mejores posibles.

Se ha mejorado la sensibilidad respecto a la realización directa, además es más modular, suele ser más fácil de ajustar ya que los bloques son independientes entre sí, y en general, más fáciles de diseñar.